ORSAY
N° d'ordre : 494

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR INGENIEUR

par

Gaby KHOURI

ETUDE DE LA STABILITE DES SYSTEMES ALGEBRO-DIFFERENTIELS PAR LES METHODES DE LYAPOUNOV

Soutenue le 29 juin 1981, devant la Commission d'Examen

MM.	DEBRAINE	Président
	BONNEMAY	
	DONADIEU	Examinateurs
	WATTEAU	

ORSAY

N° d'ordre : 494

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR INGENIEUR

par

Gaby KHOURI

ETUDE DE LA STABILITE DES SYSTEMES ALGEBRO-DIFFERENTIELS PAR LES METHODES DE LYAPOUNOV

Soutenue le 29 juin 1981, devant la Commission d'Examen

MM.	DEBRAINE	Président
	BONNEMAY	
	DONADIEU	Examinateurs
	WATTEAU	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur Pierre DEBRAINE, Professeur associé à Paris XI, pour avoir bien voulu présider la commission d'examen, et pour sa présence toujours chaleureuse.

Ma gratitude et ma reconnaissance vont tout particulièrement à Monsieur Alain BONNEMAY, Docteur ès sciences, Ingénieur au C.E.A. et Enseignant à Paris XI, pour m'avoir constamment aidé tout au long de ce travail, en avoir facilité les conditions matérielles et pour tous les échanges fructueux que nous avons eus dans bien des domaines.

Je remercie Monsieur Louis DONADIEU, Directeur de l'I.U.T. d'Orsay, ainsi que Monsieur Jean Paul WATTEAU, Directeur de l'E.N.S.E.A., pour m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury.

Je remercie également Monsieur Jean Pierre SCHWARTZ, chef du SERMA pour l'excellent accueil qu'il m'a réservé dans son service.

Un grand merci à tous mes collègues du SERMA pour leur bonne amitié et leur sympathie qui m'ont été très précieuses. Parmi toutes celles et tous ceux auxquels je pense, je voudrais particulièrement exprimer ma gratitude à Madame Anne SALOMON , pour sa grande amabilité et pour son aide maintes fois sollicitée, Monsieur François BERGER, Monsieur Jean Marc MARTINEZ et Madame Christiane BONFILS.

A tous enfin, j'adresse mon meilleur souvenir.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547318_0038

TABLE DES MATIERES

pages

INTRODUCTION 0

I - CONVENTIONS, NOTATIONS ET RESULTATS PRELIMINAIRES 1

I-1. Vecteurs 1

1-2. Matrices 2

I-2.1. Définition 2

I-2.2. Opérations sur les matrices 2

I-2.3. Matrices particulières 3

I-2.4. Matrices associées 4

I-2.5. Déterminant 4

I-2.6. Polynôme caractéristique 5

I-2.7. Matrices et applications 6

I-2.8. Formes quadratiques 8

I-2.9. Matrices s.d.p., s.d.n., ssv 8

I-2.10. Méthodes pour déterminer le signe d'une forme quadratique 9

I-2.11. Exemples de formes quadratiques 21

I-2.12. Normes de matrices 24

II - LES SYSTEMES ALGEBRO-DIFFERENTIELS 26

II-1. Définitions 26

II-2. Points d'équilibre 27

II-3. Rappels brefs 27

III - STABILITE DES SYSTEMES ALGEBRO-DIFFERENTIELS ET STABILITE DES SIMULATIONS PAR RAPPORT A LA PROPAGATION D'ERREURS 29

III-1. Généralités 29

III-1.1. Stabilité des modèles 29

III-1.2. Stabilité des simulations par rapport à la propagation d'erreurs 29

III-2. Stabilité des systèmes autonomes 30

III-2.1. Présentation 30

III-2.2. Définitions 31

III-2.3. Les fonctions de LYAPOUNOV 33

III-2.4. Théorèmes directs de LYAPOUNOV 36

III-3. Stabilité et théorèmes de LYAPOUNOV DANS LES SYSTEMES NON-AUTONOMES 38

III-4. Exemples 39

III-5. Stabilité complète 46

IV - APPLICATIONS DES THEOREMES DE LYAPOUNOV 47

IV-1. Etude de la stabilité des modèles 47

IV-1.1. Systèmes explicites différentiels linéaires 47

IV-1.1.1. Théorème linéaire de LYAPOUNOV 47

IV-1.1.2. Théorème linéaire asymptotique de LYAPOUNOV 47

IV-1.2. Systèmes différentiels linéaires implicites 55

IV-1.2.1. Définition des systèmes bien formulés 56

IV-1.2.2. Conditions de stabilité simple et de stabilité asymptotique 62

IV-1.2.3. Reformulation pratique du théorème de stabilité simple et asymptotique 64

IV-1.2.4. Théorème d'instabilité 66

IV-1.2.5. Condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique 68

IV-1.2.6. Cas particuliers : s = n 68

IV-2. Propagation des erreurs 70

IV-2.1. Equations régissant le comportement des erreurs 71

IV-2.2. Condition de non-propagation des erreurs en l'absence d'erreurs locales 72

IV-2.3. Condition de non-propagation des erreurs en présence d'erreurs locales 73

V - PROGRAMME LYAPNOV : ETUDE DES MODELES SUR ORDINATEUR 78

V-1. Généralités et fondements théoriques du code LYAPNOV 78

V-2. Les différentes étapes 79

V-3. Condition de bonne formulation 80

V-4. Algorithme DETØ = calcul de U 82

V-5. Algorithme RECH = calcul de P 91

V-6. Calcul des valeurs propres de P = méthodes de GIVENS et RUTISHAUSER 100

V-7. Méthode de calcul des matrices jacobiennes A, B et C 104

V-8. Listing 106

VI - EXEMPLE TRAITE PAR LYAPNOV 111

ANNEXES : 1°) NEPTUNIX 2 = aperçu bref

2°) Routine ALGAU

3°) Routine ALDET

4°) Routine AERUGI

INTRODUCTION

Le terme "stabilité" est actuellement très usité dans des domaines aussi divers que l'économie, la politique, les mathématiques ou l'automatique, avec des significations tantôt intuitives, tantôt bien formalisées. La conception intuitive de la stabilité est déjà une bonne approche de la stabilité des systèmes telle qu'elle sera examinée tout au long de ce travail. L'utilité d'une telle étude apparaît évidente dès que l'on considère l'extension de la modélisation et de la simulation à des domaines toujours plus variés. Comme, en outre, on cherche à modéliser des phénomènes de plus en plus complexes et à simuler des systèmes de plus en plus gros, les risques d'erreurs de simulation et de mauvais comportements du modèle augmenteront. La vérification à la main devient alors très vite illusoire, voire impossible : d'où la nécessité de disposer d'un outil de détection automatique des formulations erronées . On voit donc que c'est un problème essentiellement lié à la dimension du système. De plus l'intégration de ces modèles sur ordinateur représente un coût très important. Il est donc souhaitable de diminuer ces dépenses au maximum en n'intégrant le modèle que lorsqu'on sera sûr de sa bonne formulation et qu'on aura écarté les erreurs, dont certaines auraient pu éventuellement être repérées après un examen approfondi des équations, et d'autres cachées sous une forme plus sournoise n'auraient pu l'être que par l'effet du hasard. De plus cet examen approfondi coûterait très cher en temps de spécialiste. C'est donc la recherche systématique de ces erreurs, l'économie considérable d'argent et de temps, et le coût peu élevé de l'utilisation du code engendré par la méthode exposée ci-après qui en font les éléments positifs et déterminants.

Pour l'étude des systèmes nous nous sommes basés sur la méthode exposée par LYAPOUNOV et reprise par beaucoup d'autres après lui. Après des rappels sur les outils mathématiques utilisés intensivement dans cette analyse (chapitre I), on exposera les résultats de LYAPOUNOV, une première fois sous leur forme traditionnelle (chapitre III), et une deuxième fois sous une forme directement utilisable par des codes de calcul (chapitre IV). Ainsi avons-nous puisé abondamment dans la bibliographie très importante consacrée à ce sujet, tout en redonnant aux démonstrations et aux remarques une forme et une portée axées sur l'utilisation que nous désirions en faire et notamment en insistant sur la calculabilité des solutions. Le dernier chapitre enfin expose en détail l'algorithme sur lequel se base LYAPOUNOV, en donne un exemple d'utilisation et se termine sur une annexe consacrée au code NEPTUNIX 2.

I - CONVENTIONS, NOTATIONS ET RESULTATS PRELIMINAIRES

Nous rappelons dans ce chapitre, les principales notations et les résultats classiques utilisés.

Dans un certain nombre de cas, et quand il est apparu que la démonstration d'un résultat apportait une certaine contribution à la clarté de l'exposé, nous avons redonné cette démonstration, soit dans une de ses formes classiques extraites de la bibliographie du sujet, soit dans une forme plus originale mettant mieux en évidence tel ou tel point intéressant par la suite.

I-1. LES VECTEURS ($\mathcal{L}1\mathcal{J}$, $\mathcal{L}2\mathcal{J}$) -

I-1.1. Vecteurs lignes et vecteurs colonnes -

Soit $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ et de dimension n. On appelle vecteur de $\mathbb{R}^n$, un élément de $\mathbb{R}^n$, constitué par un ensemble ordonné de n scalaires, ou éléments de $\mathbb{R}$. On note ce vecteur en colonne, soit :

$$V = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

ou en ligne, mais alors on le notera exclusivement :

$$V^T = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

l'indice T indiquant l'opération de transposition. Donc V indiquera toujours le vecteur colonne et V^T le vecteur ligne.

I-1.2. Normes de vecteurs -

On rappelle que l'application "norme", notée $||.||$, ou $\mathcal{N}$ est une application définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ avec les 3 propriétés suivantes :

$$||\,.\,|| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$V \longmapsto ||V|| \quad /$$

$$1°-\ ||V|| \geq 0 \qquad \forall\, V \in \mathbb{R}^n$$

$$||V|| = 0 \iff V = 0$$

$$2°-\ ||\lambda . V|| = \lambda . V \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\, V \in \mathbb{R}^n$$

$$3°-\ ||V_1 + V_2|| \leq ||V_1|| + ||V_2|| \qquad \forall\, V_1\ ,\ V_2 \in \mathbb{R}^n$$

Par la suite, on utilisera les normes de HOLDER-MINKOWSKI définies comme suit :

$$\|V\|_p = \left[|v_1|^p + |v_2|^p + \ldots + |v_n|^p \right]^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{1/p} \quad , \forall \; V = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

On a en particulier les 3 normes suivantes :

$$p = 1 \Rightarrow \|V\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

$$p = 2 \Rightarrow \|V\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 \right)^{1/2}$$

qui est la norme courante d'un vecteur au sens de la distance euclidienne.

$$p = \infty \Rightarrow \|V\|_\infty = \max_i |v_i|$$

I-1.3. Produit scalaire -

Soient 2 vecteurs X, Y $\in \mathbb{R}^n$. On appelle produit scalaire des 2 vecteurs X et Y, et l'on note : $< X^T, Y >$ ou $X^T Y$, le produit :

$$< X^T, Y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad , \text{si} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

On a alors la relation dite de CAUCHY-SCHWARTZ :

$$| < X^T, Y > | \leq \|X\|_2 . \|Y\|_2$$

On remarque aussi que le produit scalaire de X par lui-même est :

$$< X^T, X > = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|X\|_2^2$$

I-2. LES MATRICES (⌜1⌝ , ⌜3⌝) -

I-2.1. Définition -

On appelle matrice un tableau rectangulaire de nombres réels ou complexes, formé de m lignes et p colonnes, et noté M ou $M_{m \times p}$. L'élément générique de M sera noté α_{ij}. Alors :

$$M = M_{m \times p} = (\alpha_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, p \end{matrix}$$

Le terme α_{ij} représente le terme situé à l'intersection de la $i^{\text{ê}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

I-2.2. Opérations sur les matrices -

Soient $A_{m \times p} = (\alpha_{ij})$, $B_{m \times p} = (\beta_{ij})$, 2 matrices de même dimension.

On définit l'addition entre A et B comme suit :

$$A_{m\times p} + B_{m\times p} = C_{m\times p}$$
$$C_{m\times p} = (\gamma_{ij}) \quad , \quad \gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \quad \forall\, i,j .$$

On définit aussi la multiplication d'une matrice par un scalaire :

$$\lambda . A_{m\times p} = (\lambda . \alpha_{ij})$$

On définit finalement le produit de deux matrices de la façon suivante :

Si $A_{m\times p} = (\alpha_{ij})$, $B_{p\times q} = (\beta_{lm})$, alors le produit de A par B se note $C_{m\times q} = A.B$ et on a :

$$C_{m\times q} = (\gamma_{if})_{\substack{i=1,\dots,m \\ f=1,\dots,q}} \quad , \quad \gamma_{if} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \cdot \beta_{jf}$$

Le produit de deux matrices n'est pas commutatif dans le cas général. On démontre que l'ensemble $\mathcal{M}(m,p\ ;\ \mathbb{R})$ des matrices à m lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, quand on le munit des deux opérations : addition et multiplication par un scalaire.

Cas particulier -

Un cas particulier très important est celui des matrices $M_{m\times m}$, notées aussi M_m, dites matrices carrées de dimension m^2 ou d'ordre m car elles ont le même nombre de lignes et de colonnes. Leur ensemble est noté $\mathcal{M}(m\ ;\ \mathbb{R})$. Le produit de deux matrices de $\mathcal{M}(m\ ;\ \mathbb{R})$ est une matrice du même type :

$$C_{m\times m} = A_{m\times m} \cdot B_{m\times m}$$

On démontre que $\mathcal{M}(m\ ;\ \mathbb{R})$ est un anneau unitaire quand on le munit de l'addition et du produit des matrices. C'est donc une algèbre sur $\mathbb{R}$.

I-2.3. Matrices particulières -

1°) Matrice unité : L'élément unité de $\mathcal{M}(n\ ;\ \mathbb{R})$ sera noté :

$$I_n = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \quad , \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

2°) Matrices diagonales carrées : Les éléments m_{ii} d'une matrice $M_{n\times n}=(m_{ij})$ s'appellent éléments diagonaux. Une matrice $M_{n\times n}$ sera dite diagonale si on a :

$$m_{ij} = 0 \qquad \text{si } i \neq j$$

On montre que l'ensemble des matrices diagonales est un sous-espace de $\mathcal{M}(n\ ;\ \mathbb{R})$.

3°) Matrice nulle : Une matrice carrée $M_{n\times n}$ sera dite nulle si tous ses éléments sont nuls :

$$M = O_n \iff m_{ij} = 0 \quad \forall\ i,j = 1,\dots,n$$

I-2.4. Matrices associées à une matrice M donnée -

1°) Matrice transposée : Soit $M_{n\times p} = (m_{ij}) \quad \in \mathcal{M}(n,p;\mathbb{R})$.

On appelle transposée de M et l'on note M^T ou M la matrice définie comme suit :

$$M^T_{p\times n} = {}^tM_{p\times n} = (m'_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}} \quad , \quad m'_{ij} = m_{ji} \ \forall i,j \ .$$

On a alors les propriétés suivantes :

$$(M^T)^T = M$$

$$(M.P)^T = P^T \,.\, M^T$$

2°) Matrices symétriques : Une matrice carrée est symétrique si les éléments symétriques par rapport à sa diagonale principale sont égaux. Cela revient à dire qu'une matrice est symétrique, si elle est égale à sa transposée :

$$M = M^T \iff m_{ij} = m_{ji} \qquad \forall i,j \ .$$

3°) Inverse d'une matrice carrée - Matrices régulières - Matrices singulières -

On appelle inverse d'une matrice carrée $M_{n\times n}$ la matrice notée M^{-1} telle que : $M.M^{-1} = M^{-1} \,.\, M = I_n$. D'où M est aussi l'inverse de M^{-1}. Une matrice M sera dite inversible ou régulière si elle admet un inverse M^{-1}. Une matrice est dite singulière si elle n'est pas régulière. On a alors les résultats suivants :

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(A.B)^{-1} = B^{-1} \,.\, A^{-1}$$

4°) Matrices semblables. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}(n\,;\mathbb{R})$, elles sont dites semblables, si on peut trouver une matrice P ayant un inverse P^{-1} et telle que :

$$M = P\,N\,P^{-1}$$

I-2.5. Déterminant d'une matrice carrée -

Soit $M_n \in \mathcal{M}(n\,;\mathbb{R})$, avec $M_n = (m_{ij})$.

On appelle déterminant de M_n et on note $\det(M_n)$ ou $\quad m_{ij}$, le scalaire défini par récurrence

$$n=1 \Rightarrow M_1 = m_{11} \iff \det(M_1) = m_{11}$$

$$n=2 \Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \iff \det(M_2) = m_{11}.m_{22} - m_{12}.m_{21}$$

$$n > 2 \quad \Rightarrow \quad \det(M_n) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \, (-1)^{i+j} \det(M^{ij}),$$

où M^{ij} désigne la matrice carrée d'ordre n-1 obtenue à partir de la matrice M en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne (on appelle également M^{ij} le mineur d'indices i,j).

On démontre que le déterminant d'une matrice est une forme n-linéaire alternée sur $\mathbb{R}$. On a en particulier les propriétés suivantes :

1°) $\det(M_n) = 0$ si une des lignes (respectivement colonnes) est combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes), et en particulier si deux lignes (resp. colonnes)sont égales.

2°) le déterminant change de signe quand on intervertit deux lignes (resp. colonnes)

3°) $\det(M^T) = \det M$

4°) $\det(A.B) = \det A . \det B$

5°) $\det I_n = 1$

6°) si A^{-1} existe, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

7°) $\det A = 0 \longleftrightarrow$ A matrice singulière

$\det A \neq 0 \longleftrightarrow$ A matrice régulière

8°) Rang d'une matrice $A_{n \times p}$, ou M_n -

Soit une matrice carrée M_n. Si $\det(M) \neq 0$, on dira que le rang de cette matrice est n. Si $\det(M) = 0$, son rang est inférieur à n. Pour le déterminer, on cherche à extraire de M une matrice carrée d'ordre $s < n$, telle que son déterminant soit différent de zéro. Si tous les déterminants d'ordre s+1, ..., n sont nuls, et qu'il existe un déterminant d'ordre s non nul, on dira alors que le rang de la matrice M est s. Cette notion s'étend aux matrices non carrées $A_{n \times p}$. Son rang sera s, si on peut extraire de A une matrice carrée d'ordre s, dont le déterminant soit différent de zéro, et que tout déterminant d'ordre supérieur soit nul. On note : rang(A) = rg(A)=s.

I-2.6. Polynôme caractéristique d'une matrice carrée. Valeurs et vecteurs propres -

Soit $M_n \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$. On appelle polynôme caractéristique de M_n, le déterminant de la matrice $M_n - \lambda . I_n$, noté :

$$p(\lambda) = \det(M_n - \lambda . I_n)$$

Le degré de ce polynôme étant n, il a au plus r racines (ou zéros) réelles et exactement n racines complexes. Ces racines sont dites racines caractéristiques du polynôme ou aussi Valeurs Propres de M_n. L'ensemble des valeurs propres de M_n est dit spectre de M_n.

Propriétés remarquables -

1°) Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

2°) On appelle trace de M_n et on note $Tr(M_n)$ la somme des termes ou éléments diagonaux de la matrice M_n. D'après les relations qui existent entre les coefficients d'un polynôme et ses racines, on démontre que $Tr(M_n)$ est égale à la somme des valeurs propres, celles-ci étant présentes dans cette somme un nombre de fois égal à leur degré de multiplicité.

$$Tr(M_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

3°) $\det(M_n) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i)$: égalité tirée également des relations entre les coefficients d'un polynôme et ses racines. Donc si l'on a : $\det(M_n) = 0$, alors M_n est singulière et une des valeurs propres de M_n est nulle.

Vecteurs propres -

Si λ_i est valeur propre de M_n, et si $V \in \mathbb{R}^n$ est tel que : $M.V = \lambda_i.V$ alors V est dit vecteur propre de M associé à la valeur propre λ_i. L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_i, noté $E(\lambda_i)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Cas particulier des matrices diagonalisables -

Si le polynôme caractéristique de M_n, $p(\lambda)$, se décompose entièrement dans $\mathbb{R}$ et si pour chaque valeur propre $\lambda_i (i = 1, \ldots, s)$ distincte, on a :
$\dim E(\lambda_i)$ = ordre de multiplicité de λ_i comme racine de $p(\lambda) = n_i$,
alors que la matrice M_n est semblable à la matrice diagonale, dont les éléments diagonaux sont précisement les λ_i répétés avec l'ordre de multiplicité correspondant n_i. On dit alors que M_n est diagonalisable.

Cas des matrices symétriques -

Le polynôme caractéristique d'une matrice symétrique $M_n \in \mathcal{M}(n;\mathbb{R})$ se décompose entièrement dans $\mathbb{R}$ et par conséquent les valeurs propres de M_n appartiennent toutes à $\mathbb{R}$. On vérifie également que le sous-esapce propre associé à chacune d'entre elles a une dimension égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre. Donc une matrice symétrique de $\mathcal{M}(n ; \mathbb{R})$ est diagonalisable.

I-2.7. Matrices et applications -

I-2.7.1. Matrice d'une application linéaire -

Soient E,F deux espaces vectoriels de dimension respective m et p et soient $B_1 = (e_1, \ldots, e_m)$ et $B_2 = (f_1, \ldots, f_p)$ deux bases de E et F respectivement. Soit g une application linéaire de E dans F

$$g : E \longrightarrow F, \quad V \longmapsto g(V)$$

$$V = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i . e_i \iff g(V) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i . g(e_i)$$

Si on décompose $g(e_i)$ suivant la base B_2 de F, et si on construit une matrice A comme suit :

la $i^{ème}$ colonne de A représente les composantes de $g(e_i)$ suivant la base B_2, alors on

aura une matrice à m colonnes ($g(e_1)$, ..., $g(e_m)$) et p lignes (composantes des $g(e_i)$ suivant f_1, ..., f_p).

$$A_{p\times m} = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{array} \begin{array}{c} \overset{g(e_1)}{\downarrow} \quad \overset{g(e_m)}{\downarrow} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array}$$

A = M(g) est la matrice de l'application g dans les bases B_1 et B_2. On a alors :

$$g(V) = A.V$$

REMARQUE :

Si g est bijective, on a : $\det(A) \neq 0$

Si g est non bijective on a : $\det(A) = 0$

D'où g bijective $\longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

I-2.7.2. Formes linéaires, bilinéaires et multilinéaires -

Une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, une forme bilinéaire est une application de E x F dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacun des arguments u et v :

$$g : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longmapsto g(u,v)$$

De façon plus générale une forme multilinéaire est une application de : E_1 x ... x E_n dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$g : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u_1, \ldots, u_n) \longmapsto g(u_1, \ldots, u_n)$$

On dit que g est n-linéaire si elle est linéaire par rapport à chacun des arguments u_1, ..., u_n. Ici on s'intéressera plus particulièrement aux formes bilinéaires de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On a donc :

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(U, V) \longmapsto g(U,V)$$

Si B = (e_1, ..., e_n) est une base de $\mathbb{R}^n$, et si

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \qquad V = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$$

alors :

$$g(U,V) = \sum_{i,j=1}^{n} u_i . v_j . g(e_i, e_j)$$

En portant les n^2 termes $g(e_i, e_j)$ dans une matrice $A_{n\times n} = (\alpha_{ij})$ telle que :

on aura alors :

$$\alpha_{ij} = g(e_i, e_j)$$

$$g(U,V) = U^T . A . V$$

A est donc la matrice de g dans la base B.

Une forme bilinéaire sera dite symétrique si : g(U,V) = g(V,U). D'où :

$$g(e_i, e_j) = g(e_j, e_i) \iff \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

Donc une forme bilinéaire symétrique aura une matrice symétrique.

I-2.8. Formes quadratiques [4] -

Soit g une forme bilinéaire symétrique dont la matrice est A dans la base B. On appelle forme quadratique associée à g une application q de E (ici $\mathbb{R}^n$) dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$U \longmapsto q(U) = g(U,U)$$

On a alors : $q(U) = U^T . A . U$

REMARQUE -

On verra dans l'étude de la stabilité l'importance primordiale des formes quadratiques et de leurs matrices symétriques.

Formes quadratiques positives, négatives et de signe varié -

Une forme quadratique q est dite définie positive si et seulement si :

$$\forall\ U \in \mathbb{R}^n,\ q(U) \geqslant 0$$
$$q(U) = 0 \iff U = 0_n$$

(où 0_n désigne le vecteur nul).

Une forme quadratique q est dite définie négative si -q est définie positive, soit :

$$\forall\ U \in \mathbb{R}^n,\ q(U) \leqslant 0$$
$$q(U) = 0 \iff U = 0_n$$

Une forme quadratique q est dite de signe varié si elle n'est ni positive ni négative.

I-2.9. Matrices symétriques définies positives, négatives et de signe varié -

Soit P une matrice symétrique de $\mathbb{M}(n ; \mathbb{R})$. P peut être donc considérée comme la matrice

d'une forme quadratique, d'où découlent les définitions suivantes :

- P est dite symétrique définie positive (s.d.p.) si et seulement si :

$$\forall\, U \in \mathbb{R}^n \quad , \quad U^T.P.U \geq 0$$
$$U^T.P.U = 0 \iff U = 0_n$$

- P est dite symétrique définie négative (s.d.n.) si -P est s.d.p., soit :

$$\forall\, U \in \mathbb{R}^n \quad , \quad U^T.P.U \leq 0$$
$$U^T P.U = 0 \iff U = 0_n$$

- P est dite symétrique définie non négative (s.d.n.n.) si l'on a :

$$\forall\, U \in \mathbb{R}^n \quad , \quad U^T.P.U \geq 0$$

- P est dite symétrique définie non positive (s.d.n.p.) si -P est s.d.n.n., soit :

$$\forall\, U \in \mathbb{R}^n \quad , \quad U^T.P.U \leq 0$$

- P est dite symétrique de signe varié (s.s.v.) si P n'est ni s.d.p. ni s.d.n., soit

$$\exists\, U_1 \in \mathbb{R}^n \;/\; U_1^T.P.U_1 > 0$$
$$\exists\, U_2 \in \mathbb{R}^n \;/\; U_2^T.P.U_2 < 0$$

REMARQUE -

Si on a une matrice régulière D (i.e. $\det(D) \neq 0$), alors on peut obtenir une matrice s.d.p., en prenant :

$$P = D^T.D$$

En effet : $\forall\, U \in \mathbb{R}^n - \{0_n\}$,

$$U^T.P.U = U^T.D^T.D.U$$
$$= \langle (DU)^T, DU \rangle$$
$$= \|D.U\|_2^2 > 0$$

1-2.10. Méthodes pour déterminer le signe d'une forme quadratique -

1-2.10.1. Calcul des valeurs propres -

On a vu les définitions d'une forme quadratique et de sa matrice associée : s.d.p., s.d.n., s.d.n.n., s.d.n.p., s.s.v. Soient alors 2 matrices semblables P et D. Il existe donc une matrice inversible H, d'inverse H^{-1} telle que :

$$P = H.D.H^{-1} \iff D = H^{-1}.P.H$$

Soit $U \in \mathbb{R}^n$. On a alors : $U^T.D.U = U^T.H^{-1}.P.H.U$

Or on avait mentionné qu'une matrice symétrique était diagonalisable, c'est-à-dire semblable à la matrice des valeurs propres qui est diagonale. Donc si P est la matrice de la forme quadratique q, alors P est symétrique. Soit alors D la matrice diagonale des valeurs propres de P. On démontre qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de P, telle que la matrice de la forme q sur cette nouvelle base soit précisément D. Si on appelle H la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ - dans laquelle q a comme matrice associée P - à la nouvelle base de vecteurs propres - où q a comme matrice D - alors :

$$P = H.D.H^{-1}$$

Comme H est une matrice de passage d'une base orthonormée dans une autre base orthonormée, on démontre alors que :

$$H^{-1} = H^T$$

H est dite matrice orthogonale. Donc :

H orthogonale $\leftrightarrow$ $H^{-1} = H^T$

$\leftrightarrow$ $HH^{-1} = HH^T = I$

$\leftrightarrow$ $\det H = \pm 1$

$\leftrightarrow$ H est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui conserve les normes.

On a alors :

$$\begin{aligned} U^T.D.U &= U^T.H^{-1}.P.H.U \\ &= U^T.H^T.P.H.U \\ &= (H.U)^T.P.(H.U) \end{aligned}$$

Mais D est la matrice diagonale des valeurs propres de P, soit :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où les λ_i peuvent à la limite ne pas être tous distincts.

Il vient, si $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ dans la base de D :

$$D.U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1.u_1 \\ \vdots \\ \lambda_n.u_n \end{pmatrix}$$

$$U^T.D.U = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1.u_1 \\ \vdots \\ \lambda_n.u_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.u_i^2$$

On voit que si l'un des λ_i est négatif, par exemple le λ_s, il suffit de prendre comme vecteur U, le vecteur :

$$u_i = 0 \quad \forall\, i \neq s$$

$$u_s = 1$$

On a alors : $U^T.D.U < 0$

Si aucun des λ_i n'est négatif, alors :

$$U^T.D.U = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.u_i^2 \geq 0$$

Si l'un des λ_i est nul, par exemple le λ_s, prenons le vecteur :

$$u_i = 0 \quad \forall\, i \neq s$$

$$u_s = 1$$

On a alors : $U^T.D.U = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.u_i^2 = \lambda_s.u_s^2$

$$\Rightarrow \quad U^T.D.U = 0$$

Donc si l'un des λ_i est nul, alors :

$$\exists\ U \neq 0_n \ / \ U^T.D.U = 0$$

Finalement si : $\lambda_i < 0 \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$ on a alors :

$$U^T.D.U = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.u_i^2 = 0 \iff \lambda_i.u_i^2 = 0 \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$$

Or : $\lambda_i \neq 0 \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$

Donc : $u_i^2 = 0 \iff u_i = 0 \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$

$$\Rightarrow U = 0_n$$

En résumé si $\lambda_i > 0$ $\forall$ i = 1, .. , n alors : D est s.d.p.

si $\lambda_i \geq 0$ $\forall$ i et si : $\exists$ s/λ_s = 0, alors D est s.d.n.n.

si $\lambda_i < 0$ $\forall$ i = 1, ..., n alors : D est s.d.n.

si $\lambda_i \leq 0$ $\forall$ i et si $\exists$ s/λ_s = 0, alors D est s.d.n.p.

si $\exists$ i/$\lambda_i > 0$ et si $\exists$ j/$\lambda_j < 0$, alors D est s.s.v.

Or on avait :

$$U^T.D.U = (HU)^T.P.(HU)$$

Remarquons que U est la matrice des composantes du vecteur exprimées dans la base de D.

Soit V la matrice des composantes de ce même vecteur exprimées dans la base de P. Comme H est la matrice de passage de la base de P dans celle de D, on a :

$$V = H.U$$
$$\Rightarrow U^T.D.U = V^T.P.V$$

Donc si D est s.d.p., on peut écrire :

$$U^T.D.U \geq 0 \quad \forall\, U \in \mathbb{R}^n$$
$$U^T.D.U = 0 \iff U = 0_n$$

Cela entraîne : $V^T.P.V \geq 0 \quad \forall\, V \in \mathbb{R}^n$

$$V^T.P.V = 0 = U^T.D.U$$
$$\iff U = 0_n$$
$$\iff V = H.U = 0_n$$
$$\iff P \text{ s.d.p.}$$

De même, on aura : D s.d.n. $\iff P$ s.d.n. $\iff \lambda_i < 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$

D s.d.n.p. $\iff P$ s.d.n.p. $\iff \lambda_i \leq 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$

D s.d.n.n. $\iff P$ s.d.n.n. $\iff \lambda_i \geq 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$

D s.s.v. $\iff P$ s.s.v. $\iff \exists\, i \,/\, \lambda_i > 0$ et $\exists\, j \,/\, \lambda_j < 0$

Par conséquent, pour déterminer le signe d'une forme quadratique q ou de sa matrice associée symétrique P, il suffit de prendre la forme réduite de q dont la matrice associée est la matrice diagonale D, constituée par les valeurs propres de P. Donc en calculant les valeurs propres de P, on sera immédiatement renseigné sur le signe de P ou de q.

I-2.10.2. Règle de SYLVESTER ou règle des déterminants (cf. par ex. [4]) -

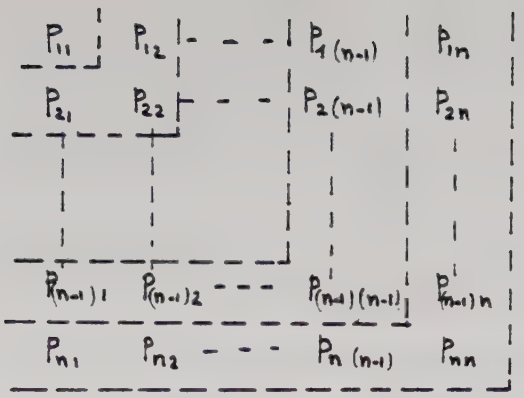
Soit $P_n = (p_{ij})$ une matrice s.d.p. SYLVESTER a montré qu'on a alors :

$$p_{11} > 0$$
$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \text{ etc...}$$

Soit : $\det[p_{ij}] > 0$ où i,j = 1, ... k

et k = 1, ..., n

Cela revient à dire que les déterminants successifs de P sont tous strictement positifs.



I-2.10.3. Règle de HADAMARD-GERSCHGORIN -

Pour établir cette règle, on énoncera d'abord le théorème de HADAMARD et celui de GERSCHGORIN qui permettent de localiser les valeurs propres d'une matrice dans le plan complexe.

a - Théorème de HADAMARD [5] : "Tout déterminant $[a_{ij}]$ d'ordre n, à éléments réels ou complexes, tel que :

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

est différent de zéro".

En effet, si $A_n = (a_{ij})$ a un déterminant nul :

$$det(A_n) = det[a_{ij}] = 0 \quad ,$$

alors le système linéaire :

$$A_n . X = 0_n \qquad , \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

donnerait n équations : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j = 0 \qquad , \quad i = 1, \ldots, n$

Ce système de n équations à n inconnues, ayant un déterminant nul, admet une solution différente de la solution triviale. Soit $(x'_1, \ldots, x'_n)$ une solution parmi l'ensemble des solutions possibles. Soit x'_k la composante de la solution X qui a le plus grand module :

$$|x'_k| > |x'_j| \qquad \forall j = 1, \ldots, n \ , \quad j \neq k$$

En prenant l'équation : $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} . x'_j = 0$

on aura :

$$-a_{kk} . x'_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} . x'_j$$

D'où :

$$|a_{kk}| . |x'_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| . |x'_j|$$

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| . \frac{|x'_j|}{|x'_k|}$$

or :

$$\frac{|x'_j|}{|x'_k|} \leq 1$$

D'où :

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

Donc :

$$\det(A_n) = 0 \iff |a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}| \qquad \forall k = 1, \ldots, n$$

b - Théorème de GERSCHGORIN [5] "Les valeurs propres de la matrice $A_n = (a_{ij})$ se trouvent dans le domaine D_1 formé par la réunion des n disques de centres a_{ii} et de rayons respectifs r_i tels que :

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i = 1, \ldots, n \quad ."$$

En effet, les valeurs propres de A_n sont les racines du polynôme caractéristique :

$$P_n(\lambda) = \det(A_n - \lambda I_n) = 0$$

Soit $A_n - \lambda I_n = (a'_{ij})$. D'après le théorème de HADAMARD, le déterminant de cette matrice ne peut être nul si l'on a les conditions :

$$|a'_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a'_{ij}| \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

Or on a ici :

$$|a'_{ii}| = |a_{ii} - \lambda| \quad \text{et} \quad a'_{ij} = a_{ij}$$

D'où :

$$|a_{ii} - \lambda| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Par conséquent le déterminant de $(A_n - \lambda I_n)$ ne pourra s'annuler que si la condition :

$$|a_{ii} - \lambda| < \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

est vérifiée pour au moins l'un des i quand i prend les valeurs entières de 1 à n. Si donc on trace les cercles de centres respectifs a_{ii} et de rayons respectifs $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$, les valeurs propres se trouveront dans la réunion de ces n cercles, soit à leur intérieur soit sur leurs frontières.

On pourrait faire le même raisonnement en prenant les colonnes à la place des lignes, et on aurait alors la condition :

$$|a_{ii} - \lambda| < \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

On définit ainsi un domaine D_2 formé par la réunion de ces n nouveaux disques. Le domaine final sera l'intersection de ces deux domaines.

c - Règle de HADAMARD - GERSCHGORIN (citée dans [6]) : "Une condition suffisante pour qu'une matrice A_n symétrique soit s.d.p. est que l'on ait :

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$ "

En effet, si l'on a :

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

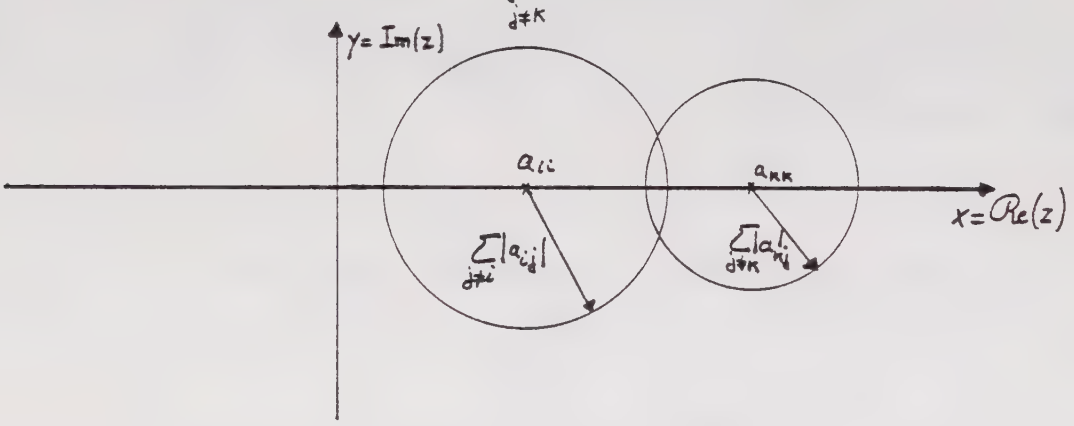
cela entraîne :

D'où :
$$a_{ii} > 0 \quad , \quad |a_{ii}| = a_{ii}$$
$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad , \quad j \neq K$$

D'après le théorème de HADAMARD, cela a pour conséquence que :

$$\det(A_n) \neq 0 \iff \lambda_i \neq 0 \qquad \forall i$$

D'autre part le théorème de GORSCHGORIN affirme que les λ_i se trouveront à l'intérieur ou sur des cercles de centres a_{ii} et de rayons $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq K}}^{n} |a_{ij}|$ respectivement.



Ce cercle ne pourra pas couper l'axe Im(z), car son rayon répond à la contrainte :

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < a_{ii}$$

Comme la matrice A_n est symétrique à coefficients réels, ses valeurs propres sont toutes réelles. Par conséquent le domaine D_1, déterminé par le théorème de GERSCHGORIN comme étant la réunion des n disques du centre a_{ii} et de rayons $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, se réduira à la réunion des n intervalles réels positifs de centres a_{ii} et de longueurs $2 \times \sum_{\substack{j=i \\ j \neq n}}^{n} |a_{ij}|$ respectivement ($\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ de part et d'autre des a_{ii}).

I-2.10.4. Méthode du signe d'une matrice -

Cette méthode globale a été développée par A.Y. BARRAUD [7] dans un article dont on trouvera les références dans la partie bibliographique. Vu l'intérêt de la méthode, on donnera ci-après ses fondements théoriques et ses principales caractéristiques. On commencera par le cas des matrices carrées d'ordre 1, c'est-à-dire les nombres réels et complexes, et on étendra l'étude au cas des matrices d'ordre n.

1-2.10.4.1. Signe d'un nombre -

Soit le nombre complexe $z = x + iy$. On suppose dans toute la suite que :

$$Re(z) = x \neq 0$$

On définit son signe par le signe de sa partie réelle x.

$$signe(z) = +1 \quad si \quad x > 0$$

$$signe(z) = -1 \quad si \quad x < 0$$

On notera par la suite sgn(z) = signe(z)

On a donc : $sgn(z) = \frac{x}{|x|}$

On cherche donc un nombre réel (+ 1 ou - 1) dont le carré vaut 1. Cela revient à calculer la racine carrée du nombre 1, on encore le zéro du polynôme: $z^2 - 1$ qui nons intéresse. Pour cela on utilisera l'algorithme de NEWTON, qui permet de construire une suite convergeant vers sgn(z). La fonction utilisée sera :

$$f(z) = z^2 - 1$$

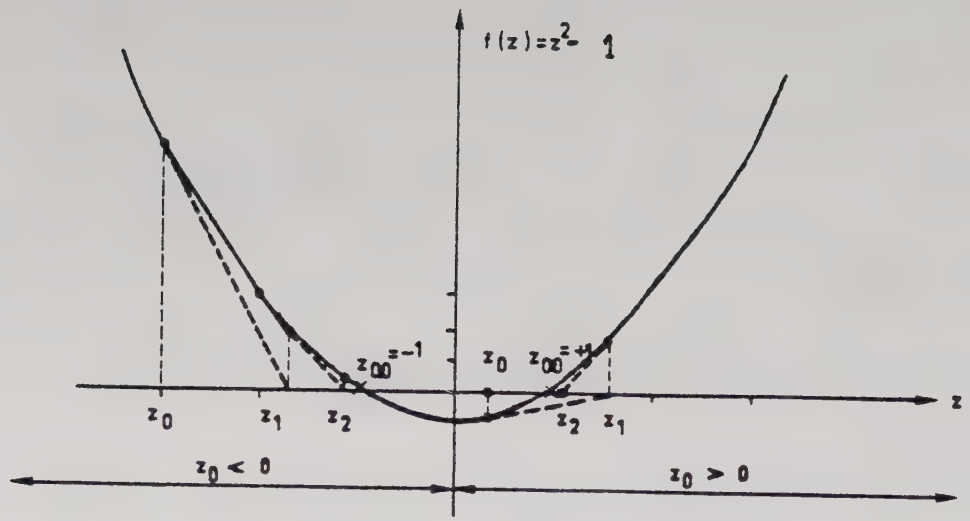
L'algorithme de NEWTON pour cette fonction s'écrit alors :

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

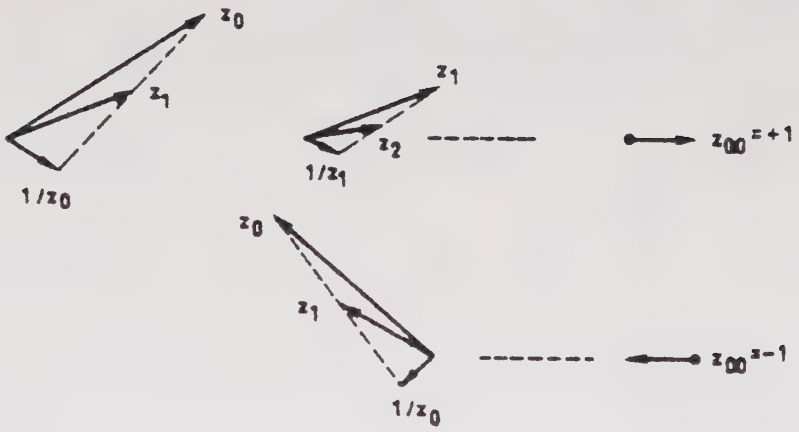
$$\Longleftrightarrow \quad z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^2 - 1}{2 z_k}$$

$$\Longleftrightarrow \quad z_{k+1} = \frac{1}{2}\left(z_k + \frac{1}{z_k}\right)$$

Si $z \in \mathbb{R}$, on aura le schéma de convergence suivant :



Si $z \notin \mathbb{R}$, on aura alors :



I-2.10.4.2. Signe d'une matrice -

a - Définitions -

Soit $A \in \mathcal{M}(n ; \mathbb{R})$. Dans le cas particulier où les valeurs propres d'une matrice et leurs sous-espaces propres associés remplissent certaines conditions mentionnées plus haut, cette matrice est diagonalisable. Mais cela n'est pas le cas général et toutes les matrices ne sont pas diagonalisables. Par contre, on montre que toute matrice est semblable à sa forme de Jordan, quand on calcule ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$.

Si A admet k valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ dont le degré de multiplicité est $n_1, \ldots, n_k$ respectivement, tels que : $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$,

alors sa forme de Jordan s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1, n_1) & & \\ & J_2(\lambda_2, n_2) & 0 \\ 0 & & \ddots \\ & & J_n(\lambda_K, n_K) \end{pmatrix}$$

où :

$$J_i(\lambda_i, n_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \updownarrow n_i \text{ lignes et colonnes}$$

Donc il existe une matrice M inversible telle que :

$$A = M\, J\, M^{-1}$$

Soit f une application définie sur les valeurs propres de A. On peut écrire :

$$f(A) = M \,.\, f(J) \,.\, M^{-1}$$

avec

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & f(J_K) \end{pmatrix}$$

où :

$$f(J_i) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \dfrac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{n_i - 1} \\ & \ddots & \ddots & f'(\lambda_i) \\ 0 & & \ddots & f(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

Si f est l'application qui, à une valeur propre, fait correspondre son signe, on a :

$$f(\lambda_i) = sgn(\lambda_i)$$

$\lambda_i \in C$: on peut calculer $sgn(\lambda_i)$ par l'algorithme exposé au paragraphe précédent. Par extension de la notion de signe d'un nombre complexe, on définit le signe d'une matrice A par une matrice S telle que : $S = f(A)$

$$\Rightarrow \quad S = M \,.\, sgn(J) \,.\, M^{-1}$$

où : $$sgn(J) = \begin{pmatrix} sgn(J_1) & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & sgn(J_K) \end{pmatrix}$$

et : $$sgn(J_i) = \begin{pmatrix} sgn(\lambda_i) & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & sgn(\lambda_i) \end{pmatrix} = \begin{cases} I_{n_i} \text{ si } sgn(\lambda_i) > 0 \\ -I_{n_i} \text{ si } sgn(\lambda_i) < 0 \end{cases}$$

car :
$$f(\lambda_i) = \operatorname{sgn}(\lambda_i)$$
$$f'(\lambda_i) = \frac{d}{d\lambda}\left(\operatorname{sgn}(\lambda_i)\right) = 0$$
$$\vdots$$
$$f^{(n_i-1)}(\lambda_i) = \frac{d^{(n_i-1)}}{d\lambda^{(n_i-1)}}\left(\operatorname{sgn}(\lambda_i)\right) = 0$$

Donc : si $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = +1 \quad \forall\, i = 1, \ldots, K \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sgn}(J) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n$

si $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = -1 \quad \forall\, i = 1, \ldots, K \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sgn}(J) = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} = -I_n$

Dans le cas général où A admet des valeurs propres positives et négatives à la fois, sgn(J) sera une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\pm$ 1. Donc S = sgn(A) est une matrice qui est diagonalisable quelle que soit la matrice A.

D'autre part :
$$\begin{aligned} S^2 &= M.\operatorname{sgn}(J).M^{-1}.M.\operatorname{sgn}(J).M^{-1} \\ &= M.\left(\operatorname{sgn}(J)\right)^2.M^{-1} \\ &= M.I_n.M^{-1} \\ &= I_n \end{aligned}$$

car : $\left(\operatorname{sgn}(J)\right)^2 = \begin{pmatrix} \left(\operatorname{sgn}(\lambda_1)\right)^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \left(\operatorname{sgn}(\lambda_K)\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n$

D'où : $S^2 = I_n$

b - Algorithme de calcul -

Par analogie au cas scalaire, on va définir une suite de matrices de $\mathcal{M}(n\,;\mathbb{R})$ qu'on notera A_k, telles que A_0 soit la matrice A dont on veut déterminer la matrice signe. On supposera dans toute la suite que les valeurs propres de A sont à partie réelle non nulle.

$$A_0 = A$$
$$\vdots$$
$$A_{k+1} = \frac{1}{2}\left(A_k + A_k^{-1}\right)$$

1er cas : A diagonalisable

$$A = M.D.M^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad A_0 = M.D_0.M^{-1}$$
$$\begin{aligned} A_{k+1} &= M.D_{k+1}.M^{-1} \\ &= \tfrac{1}{2}M\left(D_k + D_k^{-1}\right)M^{-1} \end{aligned}$$

d'où : $$D_{K+1} = \frac{1}{2}\left(D_K + D_K^{-1}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{2}\left(\lambda_K + \frac{1}{\lambda_K}\right) \end{pmatrix}$$

à la limite : $$D_\infty = \begin{pmatrix} sgn(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & sgn(\lambda_K) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad sgn(A) = M . D_\infty . M^{-1} = \lim_{K \to \infty} A_K$$

2ème cas : A semblable à sa forme de Jordan J, mais non diagonalisable -

On montre alors que si l'on définit :

$$J_0 = J$$
$$\vdots$$
$$J_{K+1} = \frac{1}{2}\left(J_K + J_K^{-1}\right)$$

on aura : $$sgn(J) = J_\infty = \begin{pmatrix} sgn(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & sgn(\lambda_K) \end{pmatrix}$$

3ème cas particulier : Matrices régulières dont toutes les valeurs propres sont réelles -

Soit A une matrice régulière d'ordre n dont les valeurs propres sont réelles et non nulles. Soient λ_{min} et λ_{max} les valeures propres de plus petit et plus grand module respectivement. Soient :

$$s_0 = |\lambda_{max}(A)| \quad , \quad t_0 = |\lambda_{min}(A)| \quad , \quad \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{s_0 . t_0}}$$

Soit : $A_0^* = \alpha_0 . A_0 \quad , A_0 = A$

On définit alors la suite :

$$A_1^* = \frac{1}{2}\left(A_0^* + A_0^{*-1}\right)$$
$$\vdots$$
$$A_{K+1}^* = \frac{1}{2}\left(\alpha_K . A_K^* + \frac{1}{\alpha_K} A_K^{*-1}\right)$$

où : $$\alpha_K = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_{max}(A_K) . \lambda_{min}(A_K)|}} = \frac{1}{\sqrt{s_K . t_K}}$$

On montre alors que cette suite A_k^* est telle que A_k^* a au moins (K+1) valeurs propres de même module maximum, et qu'elle conduit en un nombre fini d'itérations à la matrice S = sgn(A). Ce nombre d'itérations "p" est au plus égal à (n-1), où n est l'ordre de la matrice A.

On a alors : $$S = \frac{1}{|\lambda(A_p^*)|} . A_p^*$$

Dans le cas d'une matrice à valeurs propres complexes, on définit un algorithme de Newton accéléré qui donne S.

I-2.10.5. Evaluation des méthodes examinées ci-dessus -

Pour déterminer le signe d'une forme quadratique ou de sa matrice symétrique associée, on pourrait donc utiliser l'une des 4 méthodes exposées ci-dessus. En pratique, elles ne sont pas équivalentes pour les raisons suivantes :

1°) la méthode du signe d'une matrice A a des côtés positifs : nombre fini d'itérations, et coût indépendant du spectre de A. Malheureusement, elle a des aspects négatifs prohibitifs : Si A n'est pas diagonalisable, la mise de A sous sa forme de Jordan : $A = M.J.M^{-1}$ est numériquement assez complexe. Dans notre cas, on s'intéresse exclusivement aux matrices symétriques. Comme elles sont diagonalisables, ce problème ne se pose donc pas. Mais il reste toujours le problème des valeurs propres nulles que cette méthode ne permet pas de traiter, et celui du calcul des différentes matrices inverses qui est très coûteux.

2°) La méthode de HADAMARD-GERSCHGORIN est très intéressante mais n'est qu'une condition suffisante ce qui rend son utilisation impossible dans le cas général.

3°) La règle des déterminants est certes intéressante mais ne donne qu'un résultat global, qui interdit donc toute analyse des causes, et d'autre part nécessite le calcul d'un nombre assez grand de déterminants qui peuvent être très gros, ce qui est très coûteux.

4°) La méthode de calcul des valeurs propres apparaît ici comme la plus appropriée pour donner le résultat escompté et permettre son interprétation. On verra plus loin l'algorithme utilisé pour ce calcul.

I-2.11. Exemples de formes quadratiques -

1°) $f(x,y) = \alpha.x^2 + \beta.y^2$

On a déjà la forme réduite qui est constituée d'une somme de termes faisant intervenir les carrés des coordonnées. Le signe de f(x,y) dépend donc de α et β.

Si $\left.\begin{matrix}\alpha>0\\ \beta>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}f(x,y)>0 & \forall (x,y)\neq(0,0)\\ f(x,y)=0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ q déf. positive

Si $\left.\begin{matrix}\alpha<0\\ \beta<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}f(x,y)<0 & \forall (x,y)\neq(0,0)\\ f(x,y)=0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ q déf. négative

Si $\left.\begin{matrix}\alpha>0\\ \beta=0\end{matrix}\right\}$ ou $\left.\begin{matrix}\alpha=0\\ \beta>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}f(x,y)\geq 0\\ f(0,y)=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ q déf. non négative

Si $\left.\begin{matrix}\alpha<0\\ \beta=0\end{matrix}\right\}$ ou $\left.\begin{matrix}\alpha=0\\ \beta<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $f(x,y)\leq 0$: q déf. non positive

Si $\left.\begin{matrix}\alpha>0\\ \beta<0\end{matrix}\right\}$ ou $\left.\begin{matrix}\alpha<0\\ \beta>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}f(x,0)>0 \ (\text{ou } <0)\\ f(0,y)<0 \ (\text{ou } >0)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ q de signe variée

On aurait pu retrouver ces mêmes résultats en écrivant la matrice associée à q qui est : $P = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont α et β, et la discussion est la même que ci-dessus.

2°)
$$f(x,y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$
$$= \frac{1}{\alpha}(\alpha x+\beta y)^2 + y^2\left(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}\right)$$

Donc si : $\alpha>0$, $\gamma>0$ et $\alpha.\gamma>\beta^2$ alors f est définie positive.

On fait une discussion analogue pour les autres cas.

Etudions la maintenant à l'aide de la matrice associée.

$$P = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}$$
$$\det(P-\lambda I_2) = (\alpha-\lambda)(\gamma-\lambda) - \beta^2$$
$$= \lambda^2 - (\alpha+\gamma)\lambda - \beta^2 + \alpha.\gamma$$

Les racines de $\det(P-\lambda I_2)$ sont les valeurs propres cherchées. Calculons-les :

$$\Delta = (\alpha+\gamma)^2 - 4(\alpha\gamma-\beta^2)$$
$$= \alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma-4\alpha\gamma+4\beta^2$$
$$= (\alpha-\gamma)^2+4\beta^2$$

Donc : $\Delta \geq 0$ et $\Delta = 0$ si : $\begin{cases}\beta=0\\ \alpha=\gamma\end{cases}$

ce qui nous ramènerait à :

$$f(x,y) = \alpha(x^2+y^2)$$

$\det(P-\lambda I_2)$ admet donc 2 racines qui sont :

$$\lambda_1 = (\alpha+\gamma) + \sqrt{(\alpha-\gamma)^2+4\beta^2}$$
$$\lambda_2 = (\alpha+\gamma) - \sqrt{(\alpha-\gamma)^2+4\beta^2}$$

. Si $\left.\begin{matrix}\alpha>0\\ \gamma>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $\lambda_1>0$

$\lambda_2=\alpha+\gamma-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+4\beta^2}$

Donc : $\lambda_2>0 \iff \sqrt{(\alpha-\gamma)^2+4\beta^2} < \alpha+\gamma$

$\iff (\alpha-\gamma)^2+4\beta^2 < (\alpha+\gamma)^2$

$\iff \alpha\gamma > \beta^2$

De même :

$\lambda_2<0 \iff \alpha\gamma<\beta^2$

. Si $\left.\begin{matrix}\alpha<0\\ \gamma<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $\lambda_2<0$

$\lambda_1<0 \iff \alpha+\gamma < -\sqrt{(\alpha-\gamma)+4\beta^2}$

$\iff \alpha.\gamma < \beta^2$

De même :

$\lambda_1>0 \iff \alpha.\gamma>\beta^2$

. Si $\left.\begin{matrix}\alpha>0\\ \gamma<0\end{matrix}\right\}$ et par ex. : $\alpha>|\gamma|$, on aura :

$\lambda_1=\alpha+\gamma+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+4\beta^2} \quad >0$

$\lambda_2>0 \iff \alpha+\gamma>\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+4\beta^2}$

$\iff \alpha\gamma>\beta^2$

Or : $\alpha>0$ et $\gamma<0 \Rightarrow \alpha.\gamma<0$

Comme $\beta^2 \geqslant 0$, écrire que :

$\alpha\gamma>\beta^2$ est impossible.

$\Rightarrow \lambda_2<0$

Donc : $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$

. De même si $\alpha<0$, $\gamma>0$

En résumé :

- $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ si $\begin{cases}\alpha>0\\ \gamma>0\\ \alpha\gamma>\beta^2\end{cases} \Rightarrow$ f d.p.
- $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$ si $\begin{cases}\alpha<0\\ \gamma<0\\ \alpha\gamma<\beta^2\end{cases} \Rightarrow$ f d.n.

Dans les autres cas, on a : f de signe varié.

I-2.1.2. Normes de matrices (cf p.ex. [3], [6]) -

Là aussi, on rappelle que la norme d'une matrice notée || . || est une application de l'anneau des matrices carrées $\mathcal{M}(n ; \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, avec les propriétés suivantes :

$$\| . \| : \mathcal{M}(n;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M_n \longmapsto \|M_n\| \quad /$$

1°- $\|M_n\| \geq 0 \qquad \forall M_n \in \mathcal{M}(n;\mathbb{R})$
$\|M_n\| = 0 \iff M_n = \mathbb{O}_n$ (matrice nulle)

2°- $\|\alpha . M_n\| = |\alpha| . \|M_n\| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall M_n \in \mathcal{M}(n;\mathbb{R})$

3°- $\|A_n + B_n\| \leq \|A_n\| + \|B_n\| \qquad \forall A_n, B_n \in \mathcal{M}(n;\mathbb{R})$

4°- $\|A_n . B_n\| \leq \|A_n\| . \|B_n\| \qquad \forall A_n, B_n \in \mathcal{M}(n;\mathbb{R})$

On peut également définir des normes de matrices induites par les normes vectorielles, telles que celles de HÖLDER-MINKOWSKI (cf. § I-1.2.).

On définit ainsi : $$\|A\|_p = \sup_{U \neq 0_n} \left(\frac{\|A.U\|_p}{\|U\|_p} \right) , \quad U \in \mathbb{R}^n$$

$$= \sup_{\|U\|=1} \|A.U\|_p$$

$$= \sup_{\|U\| \leq 1} \|A.U\|_p$$

D'où avec les trois normes vectorielles particulières définies pour p = 1,2,∞ , on a :

Si $A_n = (\alpha_{ij})$

$p = 1 \Rightarrow \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|$: c'est donc la colonne "maximale"

$p = \infty \Rightarrow \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|$: c'est donc la ligne "maximale"

$p = 2 \Rightarrow \|A\|_2^2 = (\|A\|_2)^2 = \sup R_{A^TA}(U)$: c'est la plus grande valeur propre de A^TA appelée aussi rayon spectral de A^TA.

On note $R_{A^TA}(U)$ le quotient de RAYLEIGH de A^TA. En particulier si P est une matrice s.d.p., i.e.: $P^T = P$.

$$\iff P^T . P = P^2$$

Donc :

$$\|P\|_2^2 = \max_i \left[\lambda_i (P^2) \right]$$

Or les valeurs propres de P^2 sont égales aux carrés de celles de P. En effet, comme P est symétrique, elle est diagonalisable. Si H est la matrice de passage de P à sa forme diagonale D, on peut écrire :

$$P = H.D.H^{-1}$$

$$P^2 = (H.D.H^{-1}).(H.D.H^{-1})$$

$$= H.D^2.H^{-1}$$

$$\text{Or :} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_i & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \iff D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \lambda_i^2 & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

Comme P est s.d.p. $\lambda_i > 0 \qquad i = 1, \ldots, n$

Alors, si λ_k^2 est la valeur propre maximale de P^2, λ_k sera la valeur propre maximale de P.

$$\Longrightarrow \|P\|_2 = \lambda_k = \max_i (\lambda_i)$$

Or :
$$\|A\|_2^2 = \sup_{X \neq 0_n} \frac{X^T A^T A X}{\langle X^T, X \rangle}$$

Si P est s.d.p. alors :

$$\|P\|_2^2 = \sup_{X \neq 0_n} \frac{X^T P^2 X}{\langle X^T, X \rangle}$$

ou encore :

$$\|P\|_2 = \sup_{X \neq 0_n} \frac{X^T P X}{\langle X^T, X \rangle}$$

II - LES SYSTEMES ALGEBRO-DIFFERENTIELS

II-1. DEFINITIONS [8] , [9] -

On appelle système algébro-différentiel, un système d'équations reliant les composantes $(x_1, \ldots, x_n)$ d'un vecteur X de R^n, et comportant à la fois certaines équations différentielles et d'autres algébriques.

Exemple :
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 - 3x_3 &= 0 \\ -4\dot{x}_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - 6 &= 0 \end{aligned}$$

où $\dot{x}_i$ désigne la dérivée de la variable x_i par rapport au temps noté t

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$$

A la limite, un système algébro-différentiel peut être réduit à une seule équation différentielle à une seule variable. Il est intéressant de remarquer que si les équations différentielles décrivent l'évolution dynamique du système étudié, les équations algébriques décrivent les contraintes auxquelles il est constamment soumis au cours de son mouvement. Dans toute la suite, on décrira l'état du système par un vecteur dont les composantes sont appelées variables d'état. Ce sont des variables du système, fonctions du temps, indépendantes entre elles, et dont les variations caractérisent entièrement le système. On dit alors que l'on se place dans l'espace des variables d'état. D'autre part, dans tous les cas, on écrira le système sous sa forme canonique, i.e., s'il contient des équations différentielles d'ordre supérieur à 1, on les transforme en système d'équations différentielles du premier ordre. Ainsi, soit l'équation différentielle :

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, \dot{y}, y, t\right)$$

On écrit alors :
$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= \dot{y}_1 = \dot{y} \\ y_3 &= \dot{y}_2 = \ddot{y} \\ &\vdots \\ y_n &= \dot{y}_{n-1} = y^{(n-1)} \\ \Rightarrow \dot{y}_n &= y^{(n)} = f(y_n, \ldots, y_1, t) \end{aligned}$$

Si l'on désigne par Y le vecteur de composantes $y_1, \ldots, y_n$, alors $\dot{Y}$ est le vecteur de composantes $\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n$. On pourra donc écrire :

$$\dot{Y} = F(Y, t) \iff \begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(Y, t) \\ \dot{y}_2 &= f_2(Y, t) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= f_n(Y, t) \end{aligned}$$

Si la variable temps t n'apparaît pas explicitement dans le système, on a alors :

$$\dot{Y} = F(Y)$$

On dit que l'on a un système autonome. La solution de ce système

$$Y = Y(t)$$

peut être représentée dans l'espace des phases (ou plan de phase dans le cas $y, \dot{y}$) : on l'appelle trajectoire.

II-2. POINTS D'EQUILIBRE OU POINTS CRITIQUES -

On appelle points d'équilibre ou points critiques du système :

$$\dot{Y} = F(Y,t)$$

les points (dont les coordonnées sont les composantes du vecteur Y) où le vecteur $\dot{Y}$ s'annule.

$$Y = A \quad \text{point d'équilibre} \iff F(A,t) = 0_n \quad \forall\, t \geq 0$$

Dans le cas d'un système autonome, on aurait :

$$F(A) = 0_n$$

Si l'on fait le changement de coordonnées :

$$Y^* = Y - A$$

on peut alors écrire :

$$F(Y^* = 0_n, t) = 0_n$$

On peut donc se ramener toujours à l'équilibre à l'origine 0_n.

II-3. RAPPELS BREFS -

. Soit l'équation du premier ordre

$$\dot{y} = \lambda y$$

On sait qu'elle admet une solution du type : $y = K.e^{\lambda t}$

Le point d'équilibre est :

$$\dot{y} = 0 = \lambda y \iff y = 0$$

c'est l'origine.

. Soit le système

$$\dot{Y} = F(Y) = A.Y$$

où A est une matrice à coefficients constants.

Si A a comme valeurs propres $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (n valeurs propres, chacune étant comptée avec son ordre de multiplicité $n_1, \ldots, n_n$), alors on a la solution du système :

$$Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j \cdot g_j(t) \cdot e^{\lambda_j t}$$

où $g_j(t)$ est un polynôme en t, de degré $\leq n_j$.

Ses points d'équilibre sont donnés par :

$$\dot{Y} = 0_n \iff F(Y) = A.Y = 0_n$$

Si A est une matrice régulière, la seule solution de ce système est le vecteur nul:

$$Y = 0_n$$

Si A est singulière, alors il existe d'autres solutions que la solution triviale ($Y = 0_n$). L'ensemble des solutions constitue le noyau de A.

$$A.Y = 0_n \iff Y \in Ker(A)$$

La singularité de la matrice A signifie que toutes les variables ou composantes du vecteur Y ne sont pas indépendantes, ce qui revient à dire que l'une des valeurs propres de A, au moins, est nulle.

III - STABILITE DES SYSTEMES ALGEBRO-DIFFERENTIELS ET STABILITE DES SIMULATIONS PAR RAPPORT A LA PROPAGATION D'ERREURS

III-1. GENERALITES -

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, le terme "stabilité" est employé très couramment aujourd'hui et dans des domaines très divers. Dans le domaine du calcul numérique par exemple [8] - [10]) cette notion a une importance primordiale, puisqu'elle détermine si on peut utiliser une méthode de résolution donnée ou bien si on ne peut pas le faire. Nous nous limiterons dans cet exposé à la définition de la stabilité des modèles mathématiques décrivant des systèmes physiques, ou de toute autre nature, et à celle de la stabilité des simulations par rapport à la propagation d'erreurs.

III-1.1. Stabilité des modèles -

Etant donné un système physique, considérons le modèle mathématique choisi pour le représenter. Supposons que ce modèle s'écrive :

$$\dot{Y} = F(Y,t)$$

L'étude de la stabilité des modèles ainsi décrits est équivalente à l'étude de la stabilité de leurs points d'équilibre. Or on a vu précédemment (cf. § II-2) que l'on pouvait toujours, par un changement de variables, se ramener à des systèmes dont le point d'équilibre est l'origine 0_n. Par conséquent pour étudier la stabilité des modèles mathématiques, on se limitera à l'étude de la stabilité de leur équilibre autour de 0_n, ce qui sera développé au paragraphe III-2.

III-1.2. Stabilité des simulations face à la propagation d'erreurs [9] -

Quoique l'étude pratique de la stabilité des simulations face à la propagation d'erreurs et celle des modèles présentent des analogies que l'on verra en détail au chapitre IV, ces deux problèmes sont très différents à la base. Dans l'étude de la stabilité des modèles, on examine la stabilité de l'équilibre autour de 0_n. Dans l'étude de la stabilité des simulations, par contre, on ne s'attache pas particulièrement à l'étude d'un point d'équilibre, mais à la façon dont réagit la solution face à différentes sources d'erreurs. En effet, soit

$$Y = \mathcal{F}(t)$$

une solution du système simulé :

$$\dot{Y} = F(Y,t)$$

Si on représente alors la solution Y(t) dans l'espace, celle-ci dépendra des conditions initiales qui sont les siennes. Notons Y_1 la solution qui part du point A et Y_2 celle qui part du point B voisin de A.

Si B est suffisamment voisin de A (dans un sens que l'on précisera ultérieurement), comment évolueront Y_1 et Y_2 ? Y_2 aura-t-elle tendance à se rapprocher de Y_1, ou tout au moins à rester dans son voisinage ? Ou bien au contraire Y_2 s'écartera-t-elle de plus en plus de Y_1 au cours du temps ? Le fait d'avoir des conditions initiales A et B différentes peut être dû simplement à des erreurs de source quelconque, par exemple des erreurs de troncature des calculs dans les ordinateurs. Alors on caractérisera la simulation de la façon suivante : suite à une erreur suffisamment petite, le système évolue suivant Y_2 alors qu'il aurait dû le faire suivant Y_1. Si au cours du temps l'écart entre Y_1 et Y_2 tend à s'annuler ou du moins à rester borné dans des limites qui dépendent des spécifications du problème, la simulation sera dite stable. Dans le cas contraire, elle sera dite instable. On exposera en détail au paragraphe IV-2 la formulation mathématique et le traitement envisagés. Toutefois, on peut déjà dire que pour étudier la stabilité des simulations, on perturbera la solution en un point de fonctionnement donné, et on examinera alors son évolution ultérieure. C'est alors que sera mise en relief l'analogie de traitement de l'étude de la stabilité des simulations et de celles des modèles mathématiques. C'est pourquoi le reste de ce chapitre sera consacré exclusivement à l'étude de la stabilité des modèles.

III-2. STABILITE DES SYSTEMES AUTONOMES [9] , [11] -

III-2.1. Présentation -

On va commencer par étudier la stabilité des systèmes autonomes, où le temps n'apparaît pas explicitement. Soit donc :

$$\dot{X} = F(X)$$

dont le point d'équilibre est $X = A$, avec $F(A) = 0_n$.

Comme il est plus commode d'étudier la stabilité autour de 0_n, on a vu qu'on pouvait s'y ramener en faisant le changement de variable :

$$X^* = X - A$$
$$\dot{X}^* = F(X^*) \quad et \quad F(0_n) = 0_n$$

On continuera cependant à le noter $\overset{\circ}{X} = F(X)$, en faisant : $X = X^*$.

Soit S(R) la région contenue dans la sphère de centre 0_n et de rayon R. S(R) est définie par :

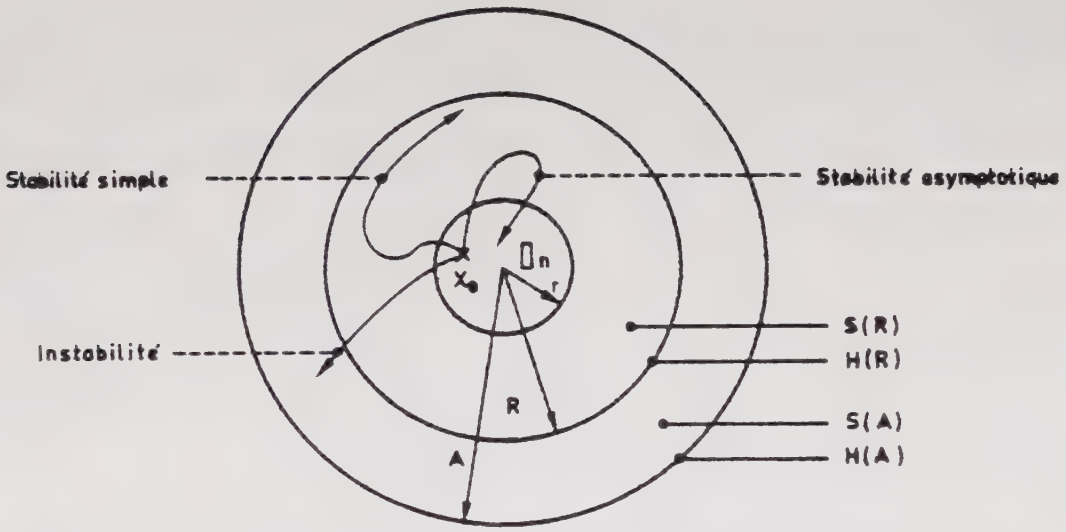
$$S(R) = \{ X \in \mathbb{R}^n / \|X\| < R \} .$$

Soit H(R) les point situés sur la sphère, soit :

$$H(R) = \{ X \in \mathbb{R}^n / \|X\| = R \}$$

On suppose que dans S(A) soit $(X \in R^n / \| X \| < A)$, le système $\overset{\circ}{X} = F(X)$ admet une solution unique passant par un point donné, et que les dérivées partielles (le Jacobien de F) $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ existent toutes et sont contenues dans S(A).

On a alors le schéma suivant :



Si donc le point 0_n est un point d'équilibre, c'est que le système y arrivant avec un vecteur vitesse nul y restera. On peut alors se poser la question suivante : un système physique quelconque étant toujours soumis à des perturbations, le système ne pourra pas rester exactement en 0_n mais s'en écartera un peu. Comment évoluera cet écart initial en fonction du temps ?

III-2.2. Définitions -

1°) On dira que l'origine est asymptotiquement stable, si le système y revient au bout d'un temps fini ou infini, c'est-à-dire que toute trajectoire ayant son origine dans un $S(R_0)$ - avec R_0 choisi de façon appropriée - tendra vers 0_n quand t tend vers l'infini.

2°) L'origine sera dite stable ou simplement stable, si le système, sans revenir en 0_n, reste autour de 0_n. Cela signifie que toute trajectoire ayant son origine dans S(r) restera dans S(R). Donc l'écart tend vers une limite supérieure et reste borné.

3°) L'origine est instable si l'écart tend vers l'infini, c'est-à-dire que toute trajectoire ayant son origine dans S(r) - avec r aussi petit que l'on désire, mais $r > 0$ - sortira de H(R) .

Les schémas suivants sont typiques de ces 3 comportements :

Stabilité simple — Stabilité asymptotique — Instabilité

On peut formaliser ces définitions en écrivant :

1°) Le système est asymptotiquement stable autour du point d'équilibre 0_n, si et seulement si (ssi) :

$$\exists\ D_0 \subset \mathbb{R}^n \text{, avec } 0_n \in D_0 \ /$$
$$\forall\ X \in D_0 \text{ avec } \dot{X} = F(X) \text{ et } X(0) = X_0$$
$$\text{on ait: } \lim_{t \to \infty} X(t) = 0_n$$

2°) Le système est simplement stable autour de 0_n, ssi :

$$\exists\ D_0 \subset \mathbb{R}^n,\ \exists\ D_f \subset \mathbb{R}^n \ /$$
$$\forall\ X \in D_0 \text{ avec } \dot{X} = F(X) \text{ et } X(0) = X_0$$
$$\text{on ait: } \lim_{t \to \infty} X(t) \in \bar{D}_f$$
$$\text{ou bien: } \forall\ t > 0,\ X(t) \in D_f$$

$\bar{D}_f$ est le fermé contenant D_f.

3°) Le système est instable autour de 0_n, ssi :

$$\forall\ D_0 \subset \mathbb{R}^n,\ \forall\ D_f \subset \mathbb{R}^n,$$
$$\text{si } X(t) \text{ vérifie : } \dot{X} = F(X) \text{ et } X(0) = X_0$$
$$\text{alors: } \exists\ t_0 > 0 \ / \ X(t_0) \notin D_f \ .$$

Remarques :

1°) Un système asymptotiquement stable, peut, au cours du temps, s'éloigner de son point d'équilibre, pourvu qu'il y revienne finalement .

2°) Un système simplement stable peut s'écarter durablement de son équilibre, cet écart restant borné mais pouvant être très grand .

3°) Un système instable admet des points à l'infini, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun domaine borné contenant la solution. Or un système physique, vu les saturations qu'il comporte, ne peut pas tendre vers l'infini. Il faut donc revoir le modèle.

III-2.3. Les fonctions de LYAPOUNOV -

Les fonctions qu'on examinera dans ce paragraphe vont jouer un rôle fondamental dans la théorie de la stabilité. Ce sont les fonctions de LYAPOUNOV.

III-2.3.1. Fonctions définies positive et négative [9] -

Soit $\overset{\circ}{X} = F(X)$. On dira qu'une fonction V(X) est définie positive sur R^n ou sur une partie $\Omega \subset R^n$ si on a les 4 conditions suivantes :

1°) V(X) est uniformément continue sur Ω.

2°) $\forall\, X \in \mathbb{R}^n \;,\; V(X) \geq 0$.

3°) $V(X) = 0 \iff X = 0_n$

4°) V(X) est dérivable, à gradient non nul pour tout $X \neq 0_n$:

$$\overrightarrow{grad}\, V(X) \neq 0_n \quad \text{si} \quad X \neq 0_n \;.$$

V(X) est définie négative si -V(X) est définie positive.

Si V(X) vérifie les 2 premières conditions, elle est dite définie non négative. V(X) est dite définie non positive si -V(X) est définie non négative.

Remarque : Pour d'autres définitions moins restrictives, cf [11] ,[13]

III-2.3.2. Dérivée eulérienne -

On définit la dérivée eulérienne de V, comme étant la dérivée de V(X) suivant un trajet déterminé par :

$$\overset{\circ}{X} = F(X)$$

Cette dérivée eulérienne notée $\overset{\circ}{V}$ est donnée par :

$$\dot{V} = \langle F^T, \overrightarrow{grad}\, V \rangle \;.$$

Cette dérivée décrit l'évolution de V(X) le long du trajet en question, et lui est donc intimement liée.

III-2.3.3. Fonctions définies positives au sens de LYAPOUNOV -

Si V(X) est telle que :

1°) V(X) : fonction définie positive $\iff V(X) > 0$

2°) $\dot{V} = \langle F^T, \overrightarrow{grad}\, V \rangle$ est une fonction définie non positive ($\dot{V} \leqslant 0$),

alors V est dite définie positive au sens de LYAPOUNOV.

III-2.3.4. Propriétés des fonctions définies positives -

1°) Si V(X) est une fonction définie positive, alors la relation :

$$V(X) = C \quad , \quad C > 0$$

définit une hyper-surface à (n-1) dimensions de $\mathbb{R}^n$. Cette hyper-surface divise $\mathbb{R}^n$ en deux régions connexées. Dans l'une on aura :

$$V(X) > C \quad ,$$

et dans l'autre :

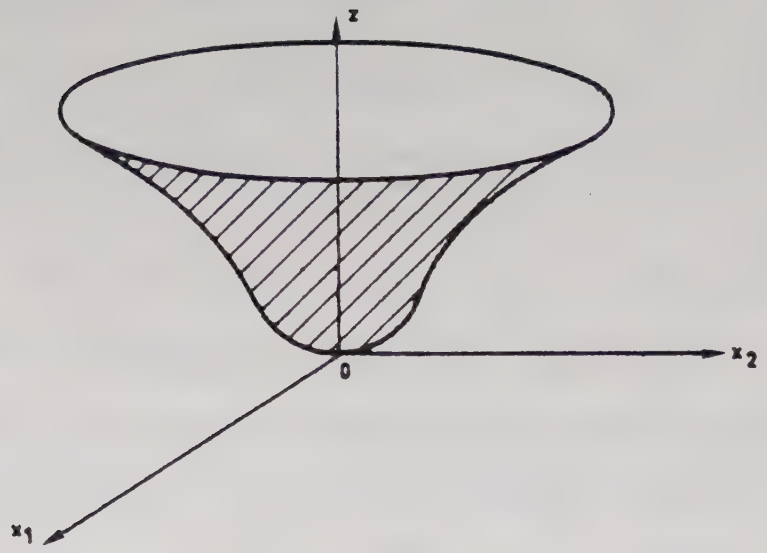
$$V(X) < C \quad .$$

2°) Deux hypersurfaces : $V(X) = C_1$, $V(X) = C_2$ avec $C_1 \neq C_2$

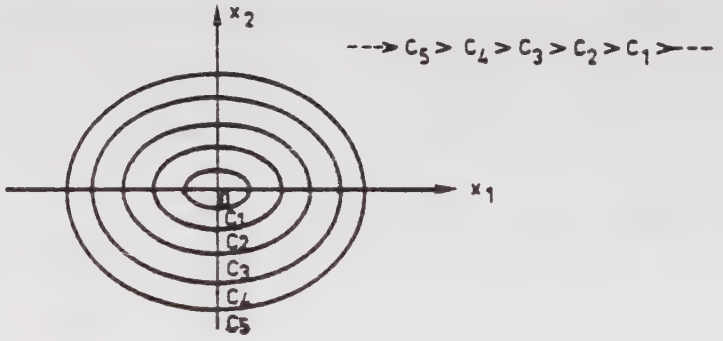
n'ont aucun point commun.

Avec ces deux propriétés on pourrait essayer de donner une vague idée de la forme de telles surfaces. Si on se place dans $\mathbb{R}^2$, on a deux variables x_1 et x_2. Soit $z = V(x_1, x_2)$. On peut alors tracer la surface en question, où 0 est le seul point où :

$$z = V(x_1, x_2) = 0$$



Si on coupe cette surface par des plans parallèles au plan z = 0 (donc le plan x_1 0 x_2), et que l'on projette les courbes obtenues sur x_1 0 x_2, on aura :



En effet, 0 ou (0_2) est à l'intérieur de chaque courbe. Par conséquent la courbe $V(X) = C_1$ coupe le plan en deux régions : l'une où $V(X) < C_1$, et 0_2 lui appartient nécessairement car $V(0_2) = 0$ (car V est définie positive) ; l'autre $V(X) > C_1$ est donc à l'extérieur. On a donc bien ces courbes emboîtées les unes dans les autres, sans point commun, et ayant des valeurs de C de plus en plus grandes, au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'origine.

Si on prend $n > 2$ (donc pour $\mathbb{R}^n$) on aura des hypersurfaces ayant les mêmes propriétés.

Remarque :

On a défini la dérivée eulérienne d'une fonction définie positive V sur un trajet :

$\overset{\circ}{X} = F(X)$ par :

$$\dot{V} = \langle \overrightarrow{grad}^T V, F \rangle = \langle F^T, \overrightarrow{grad}\, V \rangle$$

D'après ce qui précède, on comprend donc que :

Si pour tout point d'un trajet donné, on a :

$$\forall t > 0 \ , \ \dot{V}(X) \leq 0$$
$$\Rightarrow \forall t > 0 \ , \ V[X(t)] \leq V[X(0)] \ .$$

III-2.4. Théorèmes directs de LYAPOUNOV sur la stabilité -

Intuitivement il est clair que si, au voisinage d'un point d'équilibre, l'énergie du système décroît continuellement pour être minimale en ce point, alors l'équilibre est stable. Les théorèmes de LYAPOUNOV généralisent cette idée et en donnent une formulation mathématique utilisable. L'intérêt de l'idée de LYAPOUNOV réside dans ce qu'il étudie la stabilité des systèmes autonomes, non pas à partir des solutions - ce qui oblige à résoudre le système - mais indirectement, en utilisant les fonctions définies positives dites de LYAPOUNOV.

Première formulation générale des théorèmes de LYAPOUNOV [9], [11], [15], [18] -

III-2.4.1. Théorème de stabilité simple -

Soit un système $\overset{\circ}{X} = F(X)$ avec $F(0_n) = 0_n$.

Soit une fonction définie positive au sens de LYAPOUNOV, c'est-à-dire : $V(X)$ définie positive, dérivable, à gradient non nul pour tout $X \neq 0_n$, et soit la surface :

$$V(X) = C$$

telle que dans le domaine Ω défini par :

$$\Omega = \left\{ X \in \mathbb{R}^n \ / V(X) \leq C \right\} \ ,$$

$V(X)$ admette une dérivée eulérienne négative :

$$\dot{V}(X) \leq 0 \ .$$

Alors tout trajet $X(t)$ ayant son origine dans Ω, sera tel que :

$$V[X(t)] \leq V[X(0)] \ ,$$

et reste par conséquent dans le domaine :

$$V(X) \leq V(X_0) \ ,$$

qui contient l'origine. Le système est donc simplement stable autour de 0_n.

Enoncé du théorème de stabilité simple : "Soit $\overset{\circ}{X} = F(X)$. S'il existe dans un ouvert Ω contenant l'origine une fonction définie positive au sens de LYAPOUNOV V(X), alors ce système est simplement stable". C'est une condition suffisante.

III-2.4.2. Théorème de stabilité asymptotique -

"Soit $\overset{\circ}{X} = F(X)$. S'il existe dans un voisinage Ω de l'origine une fonction V(X) telle que :

$$V(X) \quad d.p.$$
$$\dot{V}(X) < 0$$

alors le système est asymptotiquement stable".

La démonstration est analogue au cas précédent. De plus, comme $\overset{\circ}{V}(X)$ est strictement négative tout au long de la trajectoire, V(X) ne peut que diminuer le long de cette trajectoire, X tend donc forcément vers l'origine d'après les propriétés des fonctions définies positives (cf. § III-2.3.4.).

III-2.4.3. Premier théorème d'instabilité de LYAPOUNOV -

"Une condition suffisante d'instabilité de $\overset{\circ}{X} = F(X)$ dans Ω est qu'il existe $V(X) \geqslant 0$ (définie non négative) telle que sa dérivée eulérienne soit définie positive".

Soit : $V(X) \geqslant 0$
$$\dot{V}(X) > 0$$

En effet si $\overset{\circ}{V}$ est strictement positif, et en partant d'un point X_0, appartenant à Ω, V(X) ne peut qu'augmenter sur ce trajet et donc s'éloigner de plus en plus de l'origine. Quelle que soit la sphère S(R) prise dans Ω, la trajectoire du point atteindra sa frontière H(R), et en sortira pour que V puisse prendre des valeurs de plus en plus grandes. On a donc bien un système instable.

III-2.4.4. Deuxième théorème d'instabilité de LYAPOUNOV -

C'est une autre forme du théorème précédent :

"Si $V(X) \geqslant 0$ (définie non négative) dans Ω, et si :

$$\dot{V} = \lambda . V + V^*$$

où V^* est non négative dans Ω et $\lambda > 0$, alors le système est instable".

En effet, de l'équation : $\dot{V} = \lambda . V + V^*$,

on pourrait déduire :

$$V \geqslant e^{\lambda . t} . V(X_0) \quad ,$$

car : $$\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}.V\right) = e^{-\lambda t}.V^{*} \geq 0 \ .$$

Donc V augmente constamment le long de cette trajectoire, et on a un système instable.

Remarque :

Ces deux théorèmes d'instabilité ont le défaut d'exiger toute la région Ω. C'est pourquoi le théorème suivant énoncé par ČETAEV, et se limitant à une partie de Ω, est plus pratique à appliquer.

III-2.4.5. Théorème d'instabilité de ČETAEV ([14]) -

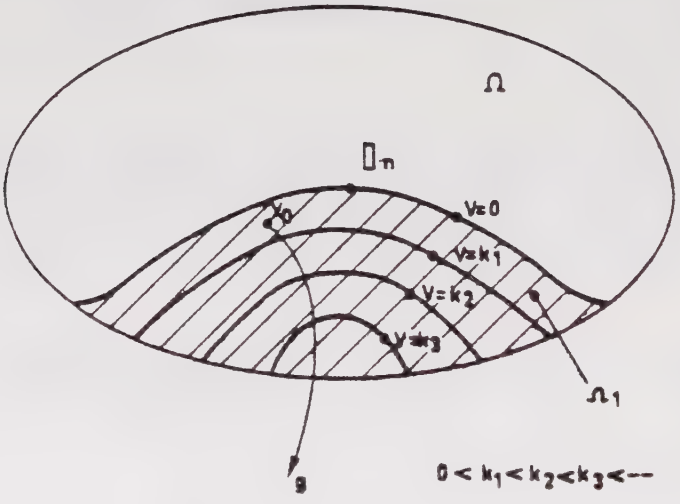
"Soit $\dot{X} = F(X)$, Ω un voisinage de l'origine, et $\Omega_1 \subset \Omega$ tels que : il existe une fonction V(X) avec les trois propriétés suivantes :

1°) V(X) continue et admet des dérivées partielles continues dans Ω_1 .

2°) $\dot{V}(X)$ et $V(X) > 0$ dans Ω_1 .

3°) V(X) = 0 sur l'hypersurface limitant Ω_1 dans Ω et contenant l'origine 0_n.

Alors, dans ces conditions, le système est instable".



V(X) = k tel que k augmente quand on s'éloigne de la frontière de Ω_1 dans Ω. Or $\dot{V}(X) > 0$ dans Ω_1. Donc le long de la trajectoire g, pour t > 0, V(X) ne peut qu'augmenter, et par conséquent sortira de Ω_1.

III-3. STABILITE ET THEOREMES DE LYAPOUNOV DANS LES SYSTEMES NON AUTONOMES -

Soit : $\dot{X} = F(X,t)$ remplissant les conditions d'existence et d'unicité des solutions dans un domaine Ω/

$$\Omega = \left\{ X \in \mathbb{R}^n \ / \ \|X\| < A \right\} \ .$$

Soit 0_n le point d'équilibre :

$$F(0_n, t) = 0_n \qquad \forall\, t \geqslant 0 \ .$$

Pour ce système, les définitions de stabilités simple et asymptotique et la définition d'instabilité sont les mêmes que pour les systèmes autonomes. Soit W(X) une fonction définie positive, au sens précédemment défini. On va généraliser cette notion en prenant une fonction V(X,t) et on dira qu'elle est elle-même définie positive si elle remplit les trois conditions suivantes :

1°) V(X,t) est définie dans $\Omega, \forall\, t \geqslant 0$.

2°) $V(0_n,t) = 0 \quad , \quad \forall\, t \geqslant 0$.

3°) V(X,t) domine ou majore une fonction W(X), elle-même définie positive au sens habituel. Cela revient à écrire :

$$W(X) \leqslant V(X,t) \qquad \forall X \in \Omega \ , \ \forall\, t \geqslant 0 \ .$$

On note $\overset{\circ}{V}$ la dérivée eulérienne de V(X,t), et on a :

$$\dot{V}(X,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \langle F^T, \overrightarrow{grad}\, V \rangle \ .$$

Si on a en outre : $\overset{\circ}{V} \leqslant 0$ dans Ω, on dit que V(X,t) est une fonction définie positive au sens de LYAPOUNOV.

Dans ces conditions, les théorèmes énoncés précédemment sur la stabilité et l'instabilité restent pratiquement inchangés, sous réserve d'y remplacer les fonctions V(X) par les fonctions V(X,t).

III-4. QUELQUES EXEMPLES -

Nous allons examiner quelques exemples, qui nous aideront à tirer des conclusions utiles.

Exemple 1 - $\ddot{x} + g(x) = 0$

où $\quad x \cdot g(x) > 0 \quad \forall\, x \neq 0 \qquad$ et $\quad g(x) = 0 \quad$ si $\quad x = 0$

(par exemple $g(x) = \omega^2 x$). On peut interpréter cette équation comme celle d'un point matériel de masse unité et soumis à une force de rappel : -g(x). Le système canonique correspondant s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{x} \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g(x_1) \end{aligned}\right.$$

Soit : $G(x_1) = \int_0^{x_1} g(u) \cdot du$. G(x) représente l'énergie potentielle du point.

Soit $\frac{x_2^2}{2}$ son énergie cinétique. Prenons comme fonction définie positive :

$$V(X) = \frac{x_2^2}{2} + G(x_1)$$

où $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

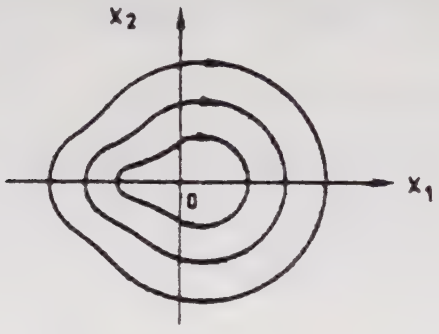
$$\dot{V}(X) = \langle \overrightarrow{grad}^T V, F \rangle$$

or : $$\overrightarrow{grad}\, V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} = g(x_1) \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} = x_2 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 = x_2 \\ f_2 = -g(x_1) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{V} = g(x_1).x_2 - g(x_1).x_2 = 0 .$$

Donc $\overset{\circ}{V} = 0$. Cela signifie que l'origine est simplement stable. On a alors dans le plan de phase :



Exemple 2 -

Soit $\dot{x}_1 = -\lambda x_1 + \ldots$, $\dot{x}_2 = -\mu . x_2 + \ldots$

où $\lambda, \mu > 0$ et les points de suspension indiquent des termes en x_1^n et x_2^n avec $n \geqslant 2$. Soit :

$$V(X) = x_1^2 + x_2^2$$

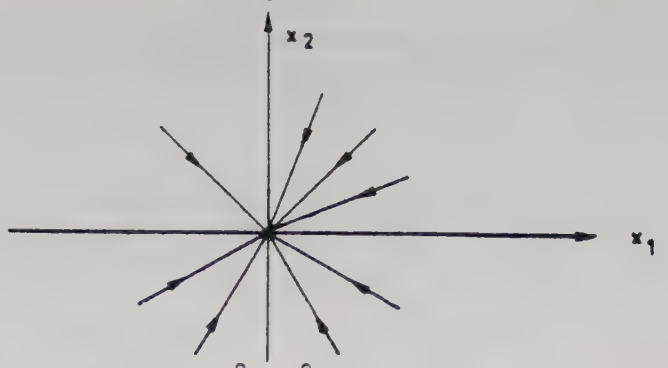
une fonction définie positive. Alors :

$$\dot{V}(X) = \langle \overrightarrow{grad}^T V, F \rangle = -2\left(\lambda . x_1^2 + \mu . x_2^2\right) + \ldots$$

où les points de suspension indiquent des termes en x_i^n, avec $n \geqslant 3$. Autour de l'origine, les termes en x_1^2 et x_2^2 deviennent prépondérants, et le signe de $\dot{V}$ dépend alors uniquement de $-2\left(\lambda . x_1^2 + \mu . x_2^2\right)$. Comme λ et μ sont positifs, il s'ensuit que :

$$\overset{\circ}{V} < 0$$

L'origine est donc asymptotiquement stable : c'est un noeud stable. Dans le plan de phase on a alors :

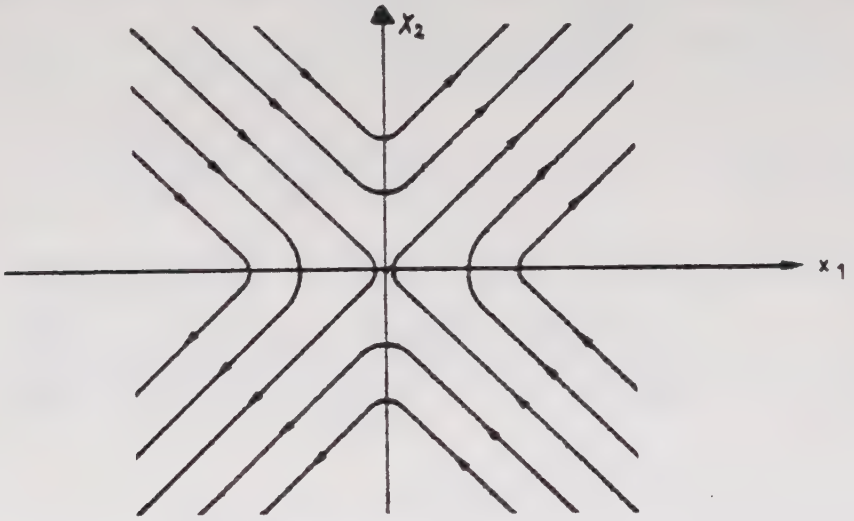


Si $\lambda < 0$ et $\mu > 0$, en prenant : $V = x_1^2 - x_2^2$, on aura une fonction définie positive dans une certaine région ($x_1 > x_2$), et la dérivée eulérienne $\dot{V}$ s'écrira :

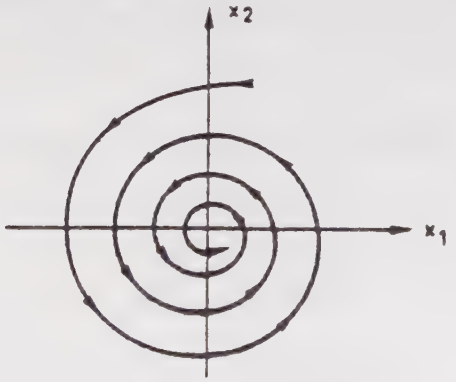
$$\dot{V} = \left(-\lambda . x_1^2 + \mu . x_2^2\right) + \ldots$$

Comme $\lambda < 0$ et $\mu > 0$, alors $\mathring{V} > 0$. Le théorème d'instabilité s'applique (on aurait pu évidemment garder la même fonction V que pour $\lambda > 0, \mu > 0$, soit $V = x_1^2 + x_2^2$ et trouver une région où $\mathring{V} > 0$).

L'origine est un col instable et on a alors dans le plan de phase la figure suivante :



Si λ et μ sont des nombres complexes à partie réelle négative, on aura un foyer stable :



Exemple 3 -

Soit $\mathring{X} = AX + Q(X,t)$, où A est une matrice régulière à coefficients constants et Q(X,t) contient des termes non linéaires (par exemple x_i^n, $n > 2$). En supposant la condition de CAUCHY-LIPSCHITZ vérifiée, à savoir (cf. [2]) :

"Si dans un domaine Ω où le système différentiel s'écrit :

$$\dot{X} = F(X,t)$$

F(X,t) est continue et vérifie une condition de LIPSCHITZ, on peut faire correspondre à tout point (t_0,X_0) de Ω un voisinage où le système différentiel a une solution et une seule passant par (t_0,X_0). Ce voisinage est défini par des conditions de la forme :

$$|t-t_0| < \alpha_0 \quad , \|X-X_0\| < r_0 \quad ,$$

où α_0 et x_0 sont des nombres positifs convenables".

On est alors dans le domaine d'application des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions de ce système. Si l'on se place alors assez près de l'origine, la partie linéaire : $\dot{X} = AX$ sera prépondérante. Considérons donc la matrice A et supposons pour simplifier qu'elle admette n valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable.

Soit $A = P.D.P^{-1}$, où D est la matrice de changement de base. On a donc :

$$X = PY \Rightarrow \dot{X} = P\dot{Y}$$
$$\dot{X} = AX+Q \Rightarrow P\dot{Y} = A.P.Y + Q$$
$$\dot{Y} = P^{-1}.A.P.Y + P^{-1}.Q$$
$$\dot{Y} = DY + P^{-1}Q$$

En considérant la partie linéaire seulement, on a donc :

$$\dot{Y} = D.Y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Les variables y_i sont ainsi décorrélées.

Soit la fonction V(Y) définie positive donnée par l'expression :

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{grad}\, V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial y_1} = 2y_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial y_n} = 2y_n \end{bmatrix}$$

$$\dot{Y} = F(Y) = \begin{bmatrix} f_1 = \lambda_1 y_1 + \cdots \\ \vdots \\ f_n = \lambda_n y_n + \cdots \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}(Y) = \langle \overrightarrow{grad}^T V, F \rangle = 2\left(\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2\right) + s(Y,t).$$

1er cas : Si $\lambda_i < 0 \quad \forall \; i = 1, \ldots, n$ (toutes les valeurs propres sont négatives), on peut alors choisir une région suffisamment petite autour de l'origine où on aura :
$V(Y) > 0 \quad et \quad \dot{V}(Y) < 0$. Donc l'origine est asymptotiquement stable.

2ème cas : Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p < 0$ et $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n > 0$, on peut prendre la même fonction V(Y) définie précédemment, ou bien : $V(Y) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - (y_{p+1}^2 + \cdots + y_n^2)$

Dans unecertaine région autour de l'origine, on aura :

$$V(Y) > 0 \quad et \quad \dot{V}(Y) > 0 .$$

L'origine est donc instable.

3ème cas : Si quelques-unes des valeurs propres sont complexes à parties réelles négatives, par exemple : $\lambda_{p+1}, \bar{\lambda}_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+m}, \bar{\lambda}_{p+m}$,
telles que : p + 2m = n, alors on peut prendre :

$$V(Y) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 + x_{p+1} \cdot \bar{x}_{p+1} + \cdots + \bar{x}_{p+m} \cdot x_{p+m}$$

On montre ainsi que l'origine est asymptotiquement stable. Si par contre ces valeurs propres sont à parties réelles positives on aura une instabilité.

4ème cas : Si une des valeurs propres est nulle ou s'il existe des valeurs propres complexes à parties réelles nulles, alors l'approximation :

$$Q(X,t) << A.X$$

n'est plus valable. L'approximation linéaire n'est plus valable, et il faut étudier la stabilité en ayant recours aux éléments non linéaires (cf. [19], [20], [21])

Conclusions :

1°) Une condition suffisante de stabilité asymptotique du système non-linéaire : $\dot{X} = AX + Q(X,t)$ est que toutes les valeurs propres soient négatives ou à partie réelle négative. Si l'une des valeurs propres est positive ou à partie réelle positive, alors l'origine est instable.

2°) Dans certains cas, l'approximation linéaire est insuffisante.

Remarques :

1°) On avait précédemment que l'équation différentielle $\dot{x} = \lambda . x$, avait comme solution : $x = K\, e^{\lambda . t}$.

Alors : $\lambda < 0 \iff x = K . e^{\lambda . t} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$: asymptotiquement stable

$\lambda > 0 \iff x \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$: instable

$\lambda = 0 \iff x = K$: stable (simplement)

Plus généralement, si $\dot{X} = DX$ (où D est la matrice diagonale des valeurs propres de A : $\dot{Y} = AY$, supposée diagonalisable pour simplifier), alors on peut écrire la solution sous la forme :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{m} g_i(t) \cdot e^{\lambda_i t} X_i$$

D'où : . si l'on a : $\lambda_i < 0, \forall i = 1, \dots, n : X(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0_n$ asymptotiquement stable ;

. si $\exists\, i / \lambda_i > 0$, alors le terme correspondant : $g_i(t).e^{\lambda_i t}.X_i$ va croître indéfiniment.

On voit donc la concordance entre ces résultats et ceux déduits de la méthode de LYAPOUNOV. C'est pourquoi on définira les matrices stables comme suit :

Matrice stable : Une matrice A est dite stable si toutes ses valeurs propres sont négatives ou à parties réelles négatives.

2°) A travers ces exemples, on saisit toute l'importance accordée dans la théorie de la stabilité aux formes quadratiques et à leurs matrices symétriques associées. Cette importance sera encore plus évidente dans la partie qui suit et qui traitera des applications des théorèmes de LYAPOUNOV.

Exemple 4 -

Etude d'un modèle simplifié de coeur de réacteur ([23], [24], [32]). Soit le modèle "basse fréquence, basse température" :

$$\dot{n} = \frac{1}{\ell^*} \cdot \rho_B \cdot n$$

$$n = n_0 + \nu$$

$$\dot{\rho}_B = -f(n - n_0)$$

Or : $\nu = n - n_0$

On a alors : $\dot{\nu} = \frac{1}{\ell^*} \rho_B (n_0 + \nu)$

$$\dot{\rho}_B = -f(\nu)$$

Supposons que f soit une fonction vérifiant :

$$\nu . f(\nu) \geq 0 \quad et \quad f(\nu) = 0 \iff \nu = 0 \ .$$

Alors la fonction d'ERGEN-POPOV :

$$V(\nu, \rho_B) = \int_0^{\nu} \frac{f(x)}{n_0 + x} dx + \frac{\rho_B^2}{2\ell^*}$$

est naturellement définie positive, et sa dérivée eulérienne s'écrit :

$$\dot{V} = \frac{f(\nu)}{n_0+\nu} \cdot \frac{1}{\ell^*} \cdot \rho_B (n_0+\nu) - f(\nu) \cdot \rho_B \cdot \frac{1}{\ell^*} \equiv 0$$

D'après les théorèmes de LYAPOUNOV, le modèle est simplement stable, mais non asymptotiquement. Le réacteur tend à "cycler" en basse fréquence. Introduisons alors l'efficacité différentielle des barres. On avait supposé que la réactivité négative ρ_B utilisée était proportionnelle au signal intégré :

$$\rho_B = -\int_0^\tau f(\nu(t)) \cdot dt \quad .$$

En toute rigueur, l'efficacité des barres de contrôle n'est pas linéaire et il convient de faire intervenir cette non-linéarité entre la cote z et ρ_B .

$$\rho_B = \rho_B(z) \cdot$$

On peut prendre comme convention :

$$\rho_B = 0 \iff z = 0$$

Supposons en outre que ρ_B est fonction croissante de z. On peut alors écrire :

$$\dot{\nu} = \frac{1}{\ell^*} \cdot \rho_B(z) \cdot (n_0 + \nu)$$

$$\dot{z} = -f(\nu)$$

Soit la fonction V :

$$V = \int_0^\nu \frac{f(x)}{n_0+x} \cdot dx + \frac{1}{\ell^*} \int_0^z \rho_B(u) \cdot du \quad .$$

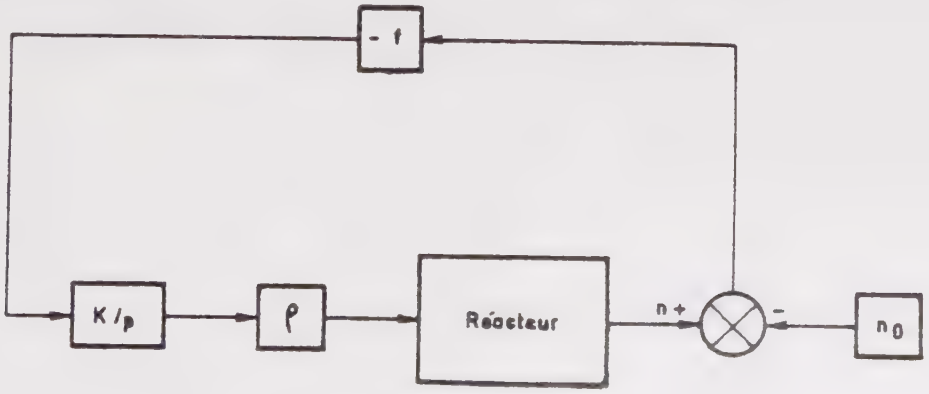
V est définie positive. Calculons sa dérivée eulérienne :

$$\dot{V} = \frac{f(\nu)}{n_0+\nu} \cdot \dot{\nu} + \frac{1}{\ell^*} \cdot \rho_B(z) \cdot \dot{z}$$

$$= \frac{f(\nu)}{\ell^*} \cdot \rho_B(z) - \frac{1}{\ell^*} \cdot \rho_B(z) \cdot f(\nu)$$

$$\equiv 0$$

On retrouve le même résultat que précédemment. Celui-ci n'a donc pas été modifié par la prise en considération de la non-linéarité de l'efficacité des barres (cf. figure ci-dessous).



III-5. EXTENSION DE LA NOTION DE STABILITE ASYMPTOTIQUE : STABILITE COMPLETE -

On conçoit fort bien que la stabilité asymptotique soit beaucoup plus intéressante en physique que la stabilité simple, car celle-ci indique que la solution s'écarte de l'équilibre d'une quantité bornée ; mais cette borne peut être arbitrairement grande. Néanmoins des problèmes se posent, même dans le cas de la stabilité asymptotique. Car nous l'avons définie essentiellement pour des systèmes qui s'écartent peu de leur position d'équilibre. Mais si l'écart n'est pas assez petit, il se peut que le système ne soit plus stable. C'est pourquoi il faudrait pouvoir déterminer le domaine de stabilité asymptotique d'un système. Si ce domaine est $\mathbb{R}^n$ tout entier, on parlera alors de stabilité complète. Cela est surtout intéressant pour les systèmes non-linéaires, car si un système linéaire est stable, cette stabilité est toujours complète. Pour l'étude de cette stabilité complète, on pourra se reporter à [9], [16] ou [22].

IV - APPLICATIONS DES THEOREMES DE LYAPOUNOV

Dans toute la suite, on notera :

P s.d.p. : matrice symétrique définie positive

s.d.n. : matrice symétrique définie négative

s.d.n.p. : matrice symétrique définie non positive

s.d.n.n. : matrice symétrique définie non négative.

s.s.v. : matrice symétrique de signe varié.

On va commencer dans une première partie par dégager des résultats concernant la stabilité des modèles, et dans une deuxième partie on étudiera la propagation des erreurs dans les simulations.

IV-1. ETUDE DE LA STABILITE DES MODELES -

IV-1.1. Les systèmes explicites différentiels linéaires -

Soit $\dot{X} = AX$, $\quad X \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathcal{M}(n;\mathbb{R})$ (1)

IV-1.1.1. Théorème linéaire de LYAPOUNOV -

Une condition suffisante de stabilité simple du système (1) est qu'il existe deux matrices P s.d.p. et H s.d.n.p. telles que :

$$A^T P + PA = H$$

Démonstration -

Soit P s.d.p.. Alors la fonction : $V(X) = X^T PX$ est une fonction définie positive. Sa dérivée eulérienne s'écrit :

$$\dot{V}(X) = \dot{X}^T.P.X + X^T.P.\dot{X}$$

Or : $\quad \dot{X} = A.X \iff \dot{X}^T = X^T.A^T$

D'où : $\quad \dot{V}(X) = X^T A^T PX + X^T PAX$

$$= X^T\left(A^T P + PA\right) X$$

On pose : $H = A^T P + PA$. Comme on prend H s.d.n.p. par hypothèse, alors : $\overset{\circ}{V} = X^T HX \leqslant 0$, et V(X) est donc définie positive au sens de LYAPOUNOV ($V > 0$, $\overset{\circ}{V} \leqslant 0$) : V(X) ne peut pas augmenter le long du trajet X, et on a donc la stabilité simple.

IV-1.1.2. Théorème asymptotique de LYAPOUNOV -

"Une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique du système (1) est

qu'il existe deux matrices P s.d.p. et H s.d.n. telles que :

$$A^T P + PA = H".$$

Démonstration -

1°) Condition suffisante : Soit P s.d.p. Alors la fonction : $V(X) = X^T PX$ est une fonction définie positive. Sa dérivée eulérienne s'écrira :

$$\dot{V}(X) = \dot{X}^T PX + X^T P\dot{X}$$

Or : $\dot{X} = AX \iff \dot{X}^T = X^T A^T$

$$\Rightarrow \dot{V}(X) = X^T A^T PX + X^T PAX$$
$$= X^T (A^T P + PA) X$$

Posons $H = A^T P + PA$. Comme H est s.d.n. par hypothèse, on a donc: $V(X) > 0$ et $\dot{V}(X) < 0$.

Le système (1) est donc asymptotiquement stable.

2°) Condition nécessaire :

On part donc de l'hypothèse que le système (1) est asymptotiquement stable. Soit donc une matrice H s.d.n., et soit P une matrice inconnue vérifiant l'équation matricielle :

$$A^T P + PA = H$$

Admettons que cette équation matricielle soit soluble par rapport à la matrice inconnue P. On trouvera en remarque à la fin de cette démonstration les raisons pour lesquelles le système (1) ne pourrait pas être asymptotiquement stable, comme l'exigerait l'hypothèse, si l'équation matricielle : $A^T P + PA = H$, ne permettait pas de calculer P.

On suppose donc, que l'on a pu calculer une matrice symétrique P, solution de cette équation matricielle.

Si P est s.d.p., la démonstration est terminée. Supposons donc que P ne soit pas s.d.p., et voyons comment cela sera en contradiction avec l'hypothèse. On a alors les trois possibilités suivantes :

1°) P s.d.n.n.

2°) P. s.d.n.p.

3°) P s.s.v.

1°) Soit P s.d.n.n. On a alors :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \ , \ X^T PX \geq 0$$
$$\exists X \neq 0_n \ / \ PX = 0_n \quad \text{car} \quad X^T PX = 0$$

$$\Leftrightarrow X^T P = 0_n \quad (\text{car } P \text{ symétrique}).$$

D'où : $X^T P A X = 0$

$$\Leftrightarrow (X^T P A X)^T = 0$$

$$\Leftrightarrow X^T A^T P X = 0$$

Comme : $X^T P A X = 0$ et $X^T A^T P X = 0$, alors :

$$X^T P A X + X^T A^T P X = X^T (A^T P + P A) X = 0$$

Or : $A^T P + P A = H$

Donc : $X^T H X = 0$, avec $X \neq 0_n$

Donc H ne pourrait plus être s.d.n., ce qui contredit l'hypothèse sur H. Par conséquent P n'est pas s.d.n.n.

2°) Soit P s.d.n.p. Alors la matrice -P = P' sera s.d.n.n. Formons alors la forme quadratique :

$$V(X) = X^T P' X$$

D'où : $\dot{V}(X) = \dot{X}^T P' X + X^T P' \dot{X}$

$$= X^T A^T P' X + X^T P' A X$$

$$= X^T \left[-(A^T P + P A) \right] X$$

Or $H = A^T P + PA$ est s.d.n. D'où :

$$-H = -(A^T P + P A) \quad \text{est s.d.p.}$$

On a donc : $V(X) \geqslant 0$ et $\overset{\circ}{V}(X) > 0$.

D'après le premier théorème d'instabilité de LYAPOUNOV (cf. § III-2.4.3.), le système (1) serait donc instable, ce qui est évidemment impossible.

3°) Soit finalement P s.s.v. Alors la matrice P' = -P est elle aussi s.s.v. Par conséquent : $\exists\, X \in \mathbb{R}^n \;/\; X \neq 0_n$ et vérifiant : $X^T P' X = 0$.

L'ensemble des X vérifiant cette relation fournit donc une variété de $\mathbb{R}^n$. Cette hypersurface divise $\mathbb{R}^n$ en deux régions. Dans l'une Ω_1 :

$$X^T P' X > 0$$

et dans l'autre Ω_2 : $X^T P' X < 0$.

En effet, pour des raisons de continuité, $X^T P' X$ ne peut pas changer de signe dans une même région, car sinon il faudrait que dans cette même région elle prenne toutes les valeurs

possibles entre la valeur positive et l'autre négative, et en particulier la valeur zéro. Or cette valeur zéro n'est atteinte que sur l'hypersurface $X^t p'X = 0$. Donc on a bien deux régions Ω_1 et Ω_2, où la forme quadratique $X^t p'X$ prend respectivement les signes + et -. Considérons alors la région Ω_1 où la forme quadratique $X^t p'X$ est positive. Sa dérivée eurélienne s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{V}(X) &= \dot{X}^T P'X + X^T P'\dot{X} \\ &= X^T\left[-(A^T P + PA)\right]X \\ &= -X^T H X\end{aligned}$$

car $H = A^T P + PA$. Comme H est s.d.n. par hypothèse, -H est donc s.d.p. D'où $\overset{\circ}{V}(X) > 0$.

On a finalement trouvé un domaine Ω_1 de $\mathbb{R}^n$ où l'on a simultanément :

$$V(X) > 0$$
$$\dot{V}(X) > 0$$

D'après le théorème d'instabilité de ČETAEV (cf. III-2.4.5), le système (1) est donc instable, ce qui est impossible.

On a donc montré que si le système (1) est asymptotiquement stable, la matrice P, solution de l'équation matricielle : $A^T P + PA = H$, où H est s.d.n., est elle-même s.d.p., ce qui achève de démontrer la condition nécessaire, et donc le théorème.

Remarque -

Pour démontrer la condition nécessaire du théorème précédent, on a admis que l'équation matricielle :

$$A^T P + PA = H$$

était soluble par rapport à la matrice inconnue P. On va voir dans ce qui suit, que l'impossibilité de calculer P implique nécessairement que le système (1) ne puisse pas être asymptotiquement stable.

1°) Supposons par exemple que l'on ait le système différentiel :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a x_1 + b x_2 \\ \dot{x}_2 &= c x_1 + d x_2\end{aligned} \iff \begin{pmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$$

Soit à trouver une matrice symétrique : $P = \begin{pmatrix}p_1 & p \\ p & p_2\end{pmatrix}$, qui vérifie la relation $A^T P + PA = H$, où H est s.d.n. Prenons pour matrice H, la matrice $-I_2$.

$$H = \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^T P + PA = \begin{pmatrix} 2(ap_1 + cp) & bp_1 + cp_2 + (a+d)p \\ bp_1 + cp_2 + (a+d)p & 2(dp_2 + bp) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a donc 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{aligned} 2ap_1 + 2cp &= -1 \\ 2dp_2 + 2bp &= -1 \\ bp_1 + cp_2 + (a+d)p &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 2a & 0 & 2c \\ 0 & 2d & 2b \\ b & c & a+d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système linéaire de 3 équations à 3 inconnues aura une solution et une seule, s'il est cramérien. Calculons donc son déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a & 0 & 2c \\ 0 & 2d & 2b \\ b & c & a+d \end{vmatrix}$$

$$= 4(ad - bc)(a+d)$$

Le système sera cramérien si l'on a simultanément :

$$\Delta \neq 0 \iff ad - bc \neq 0 \quad \text{et} \quad a+d \neq 0$$

Si ad-bc = 0, la matrice A est singulière et admet donc une valeur propre nulle. Cela implique aussi que l'une des lignes de A est un multiple de l'autre. Par exemple : $\dot{x}_2 = k.\dot{x}_1$. Cela donne alors : $x_2 = K.x_1 + \alpha$, $\alpha = c^{te}$

En résolvant le système différentiel, on a alors :

$$x_1 = \lambda . e^{K't} + \beta \quad , \quad K' = a + b.K \quad , \quad \beta = \frac{-b\alpha}{a+bK}$$

$$x_2 = K.\lambda . e^{K't} + K.\beta + \alpha$$

Si k' = a + bk < 0, alors : $x_1 \xrightarrow[t \to \infty]{} \beta$

$$x_2 \xrightarrow[t \to \infty]{} K.\beta + \alpha$$

Comme ces constantes dépendent des conditions initiales sur x_1 et x_2, le système aura une infinité de points d'équilibre qui doivent également vérifier la condition :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff ax_1 + bx_2 = cx_1 + dx_2$$

$$= 0$$

Donc : $ax_1 + bx_2 = 0 \iff x_2 = \frac{-a}{b} x_1$

Si on écarte le système différentiel $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ d'une position d'équilibre donnée, on lui

donne alors de nouvelles conditions initiales qui détermineront les nouvelles valeurs des deux seules inconnues λ et β, et donc de la position d'équilibre finale.

Par conséquent, le système écarté de sa position initiale, tend vers un autre équilibre. L'écart reste borné, mais on n'a jamais un retour à la position initiale. Donc le système sera simplement stable et non asymptotiquement stable. D'ailleurs comme l'une des valeurs propres est nulle, cela implique automatiquement que le système n'est pas asymptotiquement stable.

Si $k' = a + bk > 0$, alors le système est instable, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun domaine borné contenant la solution.

Par conséquent :

$\det(A) = ad-bc = 0 \iff$ le système est simplement stable ou bien : le système est instable

$\iff$ le système n'est pas asymptotiquement stable.

. Si $ad-bc \neq 0$, mais $a+d = 0$, alors les valeurs propres de A seront données par :

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & -a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 = bc + a^2$$

2 cas se présentent :

· $a^2+bc > 0$. Alors :

$$\lambda_1 = +\sqrt{bc+a^2} \quad , \quad \lambda_2 = -\sqrt{bc+a^2}$$

Comme on a supposé : $ad-bc = -(a^2 + bc) \neq 0$, alors :

$$\lambda_1 > 0 \quad et \quad \lambda_2 < 0$$

A ayant une valeur propre positive, cela implique que le système est instable.

· $a^2+bc < 0$. Alors :

$$\lambda_1 = i.\sqrt{-(a^2+bc)} \quad , \quad \lambda_2 = -i\sqrt{-(a^2+bc)}$$

Les 2 valeurs propres de A étant complexes imaginaires purs, le système est simplement stable.

Conclusion :

Le système linéaire $A^TP + PA = H$, a donné naissance à un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues. Ce système admet toujours une solution et une seule, sauf dans deux cas :

· $\det A = 0 \iff$ le système n'est pas asymptotiquement stable .

. $a + d = 0 \iff$ le système n'est pas asymptotiquement stable .

Les deux seuls cas où ce système ne soit pas cramérien correspondent au cas où le système différentiel n'est pas asymptotiquement stable.

2°) Soit le cas plus général où A est une matrice d'ordre n. Supposons pour simplifier qu'elle soit diagonalisable, et considérons sa matrice diagonale D.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit alors l'équation matricielle :

$$D^T P + P D = H \qquad \text{avec : } D^T = D \quad \text{car } D \text{ diagonale.}$$

Soit P la matrice symétrique à calculer :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

H est une matrice s.d.n. Prenons : $H = -I_n$

$$D^T P + P D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \cdot p_{11} & (\lambda_1+\lambda_2)p_{12} & \cdots & (\lambda_1+\lambda_n)p_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ (\lambda_1+\lambda_n)p_{1n} & (\lambda_2+\lambda_n)p_{2n} & \cdots & 2\lambda_n \cdot p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

Cela donne alors les relations :

$$2\lambda_i \cdot p_{ii} = -1 \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n$$

$$(\lambda_i + \lambda_j)\, p_{ij} = 0 \qquad \text{où : } \begin{cases} i = 1, \ldots, n-1 \\ j = i+1, \ldots, n \end{cases}$$

Donc P sera entièrement déterminé et de façon unique si ces relations permettent de calculer les p_{ii} et p_{ij}.

Si $\exists\, i / \lambda_i = 0$, alors la relation :

$$2\lambda_i \cdot p_{ii} = -1$$

est impossible $\Rightarrow$ On ne peut pas calculer P.

Supposons donc que : $\lambda_i \neq 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$.

Alors la relation : $(\lambda_i + \lambda_j) \cdot p_{ij} = 0$

entraîne : $p_{ij} = 0 \quad si \quad \lambda_i + \lambda_j \neq 0$.

Mais si : $\lambda_i + \lambda_j = 0$, alors p_{ij} est indéterminé.

Or : $\lambda_i + \lambda_j = 0 \iff \lambda_i = -\lambda_j$

Comme tous les λ_i sont différents de zéro, alors λ_i et λ_j sont donc de signe contraire. L'un, λ_i par exemple, sera positif, et l'autre λ_j sera négatif. Mais si λ_i est positif, cela implique que la matrice A admet une valeur propre positive. Le système différentiel est donc instable.

Conclusion -

Les seuls cas où on ne peut pas calculer P sont :

1°) $\exists\, i \;/\; \lambda_i = 0$

2°) $\exists\, i \;/\; \lambda_i > 0$

Dans les deux cas, cela signifie que la matrice A admet une valeur propre nulle ou positive, ce qui implique que le système différentiel ne peut pas être asymptotiquement stable. On peut donc en conclure que si le système différentiel (1) est asymptotiquement stable, l'équation matricielle : $A^TP + PA = H$, où H est s.d.n., admet forcément une solution P. Le théorème précédent a montré qu'en outre la matrice P ainsi calculée était s.d.p.

3°) On a supposé dans le 2° que A était diagonalisable et on a considéré alors directement l'équation matricielle : $D^TP + PD = H$, où D était la matrice diagonale des valeurs propres de A. On a donc supposé implicitement que ce qui était vrai avec D l'était aussi avec A. On peut en fait le démontrer de la façon suivante :

Soit D la matrice diagonale des valeurs propres de A. Soit F la matrice de passage de A à D. On a alors :

$$A = F.D.F^{-1} \iff A^T = (F^{-1})^T D^T . F^T$$
$$= (F^T)^{-1} D F^T$$

On a : $D^T = D$ car D diagonale.

La relation matricielle : $A^TP' + P'A = H'$, où H est s.d.n., et P' la matrice inconnue à calculer - mais P' symétrique par hypothèse - devient :

$$A^TP' + P'A = (F^T)^{-1} D F^T P' + P'F D F^{-1} = H'$$
$$\iff (F^T)^{-1} D F^T P' + P'F D F^{-1} = H'$$

Multiplions cette équation à gauche par F^T et à droite par F. Il vient :

$$F^T(F^T)^{-1} D F^T P' F + F^T P' F D F^{-1} F = F^T H' F$$

$$\Leftrightarrow \qquad D F^T P' F + F^T P' F D = F^T H' F$$

Soit : $P = F^T P' F$

On a alors : $P^T = (F^T P' F)^T$

$= F^T P' F$ (car P' est symétrique).

D'où : $P^T = P$ et P est donc symétrique.

D'autre part, H' étant s.d.n., et F étant une matrice régulière, car c'est la matrice d'un changement de base, alors :

$F^T H' F$ est aussi s.d.n.

En effet : $\forall X \neq 0_n \ , \ X^T F^T H' F X = (FX)^T H' (FX)$

Comme H' est s.d.n., cette expression est négative strictement, sauf si FX est le vecteur nul.

Or : $FX = 0_n \Leftrightarrow X = 0_n$ car F régulière

$F^T H' F = H$ est s.d.n.

On a donc à résoudre la nouvelle équation matricielle :

$$D^T P + P D = H$$

où H est s.d.n. et P la matrice inconnue, mais symétrique, à calculer.

Or : $P = F^T P' F \Leftrightarrow P' = (F^{-1})^T P F^{-1}$

Donc toutes les conclusions valables pour P le seront aussi pour P'. Donc ce qui est valable pour D le sera nécessairement pour A.

IV-1.2. Systèmes algèbro-différentiels linéaires implicites -

Soit $X \in \mathbb{R}^n$ et soit :

$$\left.\begin{aligned} A_{s\times n} . X + B_{s\times n} . \dot{X} &= 0_s \quad (21) \\ C_{(n-s)\times n} . X &= 0_{n-s} \quad (22) \end{aligned}\right\} (2)$$

(22) représente des équations algébriques entre les variables du système, ou encore les contraintes auxquelles il est soumis. Le cas $C_{(n-s)\times n} = 0_{(n-s)\times n}$ sera examiné comme cas particulier (cf. § IV-1.2.6.). Nous allons d'abord examiner une condition générale dite de bonne formulation du

système, sans laquelle l'existence même d'une solution est compromise.

IV-1.2.1. Définition des systèmes bien formulés -

Soit la matrice carrée B' d'ordre n, donnée par :

$$B'_{n\times n} = \begin{pmatrix} B_{s\times n} \\ C_{(n-s)\times n} \end{pmatrix}$$ formée par la juxtaposition des 2 matrices B et C

(les s premières lignes de B' sont la matrice B, et les (n-s) autres sont la matrice C). On dira alors qu'un système du type (2) est bien formulé si la matrice B' ainsi définie est régulière, soit : $\det(B') \neq 0$. Cette notion de système bien formulé est fondamentale, car elle est reliée à des conditions d'existence et d'unicité de la solution.

Cependant, dans la discussion qui suit, nous apporterons des nuances à cette notion de système bien ou mal formulé, en faisant intervenir la matrice A. Cela nous permetrra d'envisager la calculabilité de la solution et sa stabilité face à la propagation d'erreur : nous verrons par exemple, que suivant le rang de la matrice A, un système mal formulé peut devenir utilisable moyennant certaines modifications dans sa formulation, alors qu'un autre bien formulé peut ne pas admettre de solution asymptotiquement stable face à la propagation d'erreur. C'est pourquoi il nous a paru intéressant de compléter l'étude de la bonne formulation mathématique dans sa forme traditionnelle, et à chaque fois que cela a été possible, par une étude des conséquences du rang de la matrice $A_{s\times n}$ sur les propriétés et la calculabilité numérique de la solution, car ce travail se propose comme but ultime d'aider à trouver une formulation mathématique satisfaisante par ses propriétés et donc utilisable.

Supposons donc que :

$$\det(B') = 0$$

Comme le déterminant est une application multilinéaire alternée par rapport à ses lignes et ses colonnes, alors la condition : $\det(B') = 0$ implique qu'une des lignes est combinaison linéaire des autres. On va donc examiner les différents cas possibles :

1°) une des lignes de C est combinaison linéaire des autres lignes de C .

2°) une des lignes de B est combinaison linéaire des autres lignes de B .

3°) une des lignes de C est combinaison linéaire des lignes de B.

Les autres cas se déduisent de ces trois-ci.

1°) Si une des lignes de C est combinaison linéaire des autres lignes de C, cela signifie qu'une des contraintes du système est déjà exprimée par les autres et qu'elle est superflue. Les (n-s) contraintes sont donc équivalentes à (n-s-1) contraintes. Ces (n-s-1) contraintes jointes aux s équations différentielles (supposées indépendantes), donnent donc un système de (n-1) équations liant n variables. Notre système est donc sous-défini, et nous n'aurons plus une solution unique pour des conditions initiales données. Ces conclusions sont valables si, à plus forte raison, plusieurs lignes de C sont combinaisons linéaires des autres lignes de C. Cela revient à

dire que le rang de la matrice C n'est pas (n-s).

2°) Si une des lignes de B est combinaison linéaire des autres, on pourrait faire un raisonnement analogue au précédent, en y apportant quelques nuances. En effet, les conclusions qu'on pourrait en tirer dépendent du rang de la matrice A, car on a :

$$A_{s\times n} \cdot X + B_{s\times n} \cdot \dot{X} = 0_s$$

Pour le voir prenons un exemple simple de 3 équations à 3 inconnues :

1er cas: rang (A) = s :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - 3x_1 + 4x_3 &= 0 \\ \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

On a donc : $s=2,\ n=3$.

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}$$

On voit ici que A est de rang 2 car ses deux lignes sont indépendantes l'une de l'autre. B par contre est de rang 1. Cela va impliquer une contrainte supplémentaire sur les x_i :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 &= 3x_1 - 4x_3 \\ \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 &= 3x_2 - 5x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3x_1 - 4x_3 = 3x_2 - 5x_3$$

$$\Leftrightarrow 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

B n'est pas de rang maximal, alors que A l'est. Cela revient donc à considérer une contrainte de plus, et une équation différentielle de moins. Le système est équivalent donc à un système à une équation différentielle et deux équations algébriques soit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - 3x_1 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Le même système écrit ainsi est bien formulé.

2ème cas : rang (A) $<$ s : On a donc ici rang (B) $<$ s et rang (A) $<$ s.

Soit le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - 3x_1 + 4x_3 &= 0 \\ 2\dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 - 6x_1 + 8x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

On voit immédiatement que la deuxième équation est égale à deux fois la première.

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad B_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C_{1x3} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

B est de rang 1. Mais comme A est de rang 1, et qu'en plus la dépendance des lignes dans A et dans B se fait au même niveau et dans les mêmes coefficients (la 2ème ligne de A et de B est égale à 2 fois la première ligne dans A et dans B), alors les 2 équations différentielles sont équivalentes à une seule. Notre système devient donc le même que :

$$\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - 3x_1 + 4x_3 = 0$$
$$3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$$

On a alors un système de 2 équations à 3 inconnues. Ce système est donc sous-défini et n'admet pas de solution unique pour des conditions initiales données.

Si on prend maintenant le système :

$$\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - 6x_2 + 9x_3 = 0$$
$$2\dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$$

On a alors :

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 9 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C_{1x3} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

On a ici aussi : rang (A) = 1, et rang B = 1. Mais la première ligne de A est égale à 3 fois la seconde, alors que la seconde ligne de B est égale à deux fois la première. Les lignes de A et de B sont dépendantes, mais à des niveaux et avec des coefficients multiplicatifs différents. Cela va entraîner que :

$$-2x_1 + 3x_3 = 0 \iff x_1 = \frac{3}{2} x_3$$
$$2\dot{x}_2 + \dot{x}_1 = 0 \iff x_1 = -2x_2 + c^{te}$$

On aura un système où la solution contiendra une constante additive qui dépend des conditions initiales. Par conséquent, face à une perturbation à partir d'une position d'équilibre donnée, le système ne reviendra jamais à sa position initiale. Il sera dans le meilleur des cas simplement stable, mais jamais asymptotiquement stable.

Conclusion :

Si B n'est pas de rang maximal, on aura un système mal formulé. Mais les conséquences de cette mauvaise formulation dépendront du rang de la matrice A. Si A est de rang maximal s, le système à s équations différentielles et (n-s) équations algébriques est équivalent à un système à (s-1) équations différentielles et (n-s+1) équations algébriques (si seulement une ligne de B est dépendante des autres). Dans ce cas le système garde quand même toutes ses chances d'un bon comportement, quand on aura corrigé ce défaut.

Si A n'est pas de rang maximal, mais que les dépendances dans A soient les mêmes que dans B (mêmes lignes et mêmes coefficients), alors les (n-s) équations algébriques seront inchangées, alors que les s équations différentielles sont équivalentes à (s-1) équations si le rang

de A et celui de B sont égaux à (s-1)- (si le rang de A et celui de B était (s-k), on aurait alors (s-k) équations différentielles indépendantes) - Notre système devient donc à n-1 équations et n inconnues, et est donc sous-défini. Il faut le revoir entièrement.

- Si A n'est pas de rang maximal, et qu'en outre les dépendances entre les lignes de A et les dépendances entre lignes de B ne sont pas les mêmes, on a alors création de contraintes algébriques supplémentaires, et introduction de constantes additives qui feront que le système ne pourra jamais être asymptotiquement stable. Il faut revoir le système.

Cas particulier -

Cela se passerait aussi si B était de rang maximal égal à s, mais que A était de rang inférieur. Si on a donc :

$$\text{rang}(A) < s \qquad \text{et rang}(B) = s,$$

alors on aura encore introduction de constantes additives qui empêcheront le système d'être asymptotiquement stable. Cela provient du fait que, dans ce cas, on aura une contrainte du type :

$$\sum \lambda_i . \dot{x}_i = 0$$

Donc le système, sans être mal formulé, au sens précédemment défini, ne pourra pas être asymptotiquement stable, et selon les applications, cela pourrait être déterminant pour le rejeter.

3°) Finalement, si une des lignes de $C_{(n-s)\,x\,n}$ est combinaison linéaire d'une ou de plusieurs lignes de $B_{s\,x\,n}$, alors que B et C sont de rang maximal quand on les considère isolément, quelle signification cela a-t-il ? Nous allons d'abord le voir sur un exemple simple et assez particulier.

Soit le système :
$$\begin{aligned} 2\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - \dot{x}_3 + x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 + 2\dot{x}_3 + \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

On a donc : s = 2, n = 3.

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix}, \quad B_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C_{1x3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que B et C sont de rang maximal, si elles sont prises isolément :

$$\text{rang}(B) = 2, \qquad \text{rang}(C) = 1$$

Mais $\det \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \det(B') = 0$. En effet, la deuxième ligne de B est égale à la ligne de C moins la 1ère ligne de B. Considérons la contrainte:

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 0 \quad \text{par dérivation.}$$

Ajoutons cette nouvelle équation différentielle à l'opposée de la première. Il vient :

$$-\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 + 2\dot{x}_3 - x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Or la deuxième équation différentielle s'écrit :

$$-\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 + 2\dot{x}_3 + \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = 0$$

En rapprochant ces deux équations, on constate que les parties différentielles sont identiques. D'où :

$$-x_1 - x_2 - x_3 = \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3$$

On a alors 3 cas :

1°) $\lambda = \mu = \nu = -1$: Dans ces conditions, la deuxième équation de notre système est exactement équivalente à la dérivée de la contrainte moins la première équation. C'est donc une équation superflue. Le système est donc équivalent à la première équation différentielle et à la contrainte. On a donc 2 équations à 3 inconnues : le système est sous-défini et n'admet pas de solution unique pour des conditions initiales données.

2°) $\lambda = \mu = \nu \neq -1$: Dans ces conditions, on va avoir :

$$-(x_1 + x_2 + x_3) = \lambda (x_1 + x_2 + x_3) .$$

Comme $\lambda \neq -1$, cela implique : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - \dot{x}_3 = 0 \\ -\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 + 2\dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

Cette contrainte sur les dérivées entraîne l'apparition d'une constante additive qui empêchera le système d'être asymptotiquement stable.

3°) Les 3 coefficients λ, μ, ν ne sont pas égaux : $\lambda \neq \mu \neq \nu$ (il suffit que deux d'entre eux soient différents). Dans ce cas, on aura une nouvelle contrainte algébrique :

$$-x_1 - x_2 - x_3 = \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 \iff (\lambda+1)x_1 + (\mu+1)x_2 + (\nu+1)x_3 = 0$$

Le système sera donc équivalent à celui-ci :

$$\begin{gathered} 2\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - \dot{x}_3 + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ (\lambda+1)x_1 + (\mu+1)x_2 + (\nu+1)x_3 = 0 \end{gathered}$$

On a donc un système où il y a une équation différentielle en moins et une équation algébrique en plus, mais qui conserve toutes ses chances d'un bon comportement dynamique.

Conclusion :

Si maintenant on revient au cas général où B et C, prises isolément, sont deux matrices de rang maximal, mais que $\det\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = 0$ parce que l'une des lignes de C est combinaison linéaire de lignes de B, on peut alors écrire :

Soit $(C_1, \ldots, C_n)$ les éléments de la ligne de C en question. Si on a :

$$B_{s\times n} = (b_{ij}) \qquad \text{, on a alors :}$$

$$c_j = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot b_{ij} \qquad \text{pour } j = 1, \ldots, n$$

Cette ligne de C correspond à l'équation algébrique :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j = 0$$

En dérivant par rapport au temps cette équation, il vient : $\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \dot{x}_j = 0$

$$\text{Or :} \quad c_j = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot b_{ij} \quad \Rightarrow \quad c_j \cdot \dot{x}_j = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot b_{ij} \cdot \dot{x}_j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \dot{x}_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot b_{ij} \cdot \dot{x}_j = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \dot{x}_j = 0$$

Or on a : $A \cdot X + B \dot{X} = 0_s$

ce qui est équivalent au système d'équations différentielles:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot \dot{x}_j = 0 \qquad \text{, pour } i = 1, \ldots, s$$

si $A_{s\times n} = (a_{ij})$.

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot \dot{x}_j = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \qquad , \; i = 1, \ldots s \; .$$

En reportant cette expression dans $\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \dot{x}_j = 0$, il vient :

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \dot{x}_j = 0 \quad = -\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \cdot a_{ij}\, x_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i\, a_{ij} \Big) \cdot x_j = 0$$

On a alors : $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot x_j = 0$, avec $\alpha_j = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot a_{ij}$.

On a ainsi 2 cas possibles :

$$1^\circ\text{-} \quad \alpha_j = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot a_{ij} = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n \quad \Leftrightarrow \quad rg\,(A_{s\times n}) < s$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot x_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot x_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

Par conséquent une des équations différentielles est combinaison linéaire de la dérivée d'une contrainte et des autres équations différentielles. Elle est donc superflue ou

redondante, et le système est alors équivalent à un système de (n-1) équations-(s-1) équations différentielles et n-s équations algébriques- à n inconnues. Il n'admet donc pas de solution unique pour des conditions initiales fixées. Il est sous-défini (et cela est dû à ce que : rang $A_{s\,x\,n} < s$).

2°) $\exists j \;/\; \alpha_j \neq 0$. On a alors pour les α_j non nuls la relation :

$$\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j x_j = 0 \quad , \quad \ell \leq s \quad .$$

C'est une nouvelle contrainte du système. Le système est donc équivalent à un autre système à (n-s+1) contraintes et (s-1) équations différentielles, c'est-à-dire que l'on a remplacé une des équations différentielles incriminées par la nouvelle contrainte : $\sum_{j=1}^{l} \alpha_j x_j = 0$ (ou plus généralement : $\sum_{j=1}^{s} \alpha_j x_j = 0$). Il suffirait donc dans ce cas de reformuler le système, car son vice est un vice formel et non fondamental.

Par conséquent, on a vu que si $\det(B') = \det\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = 0$ pour l'une quelconque des raisons examinées, des problèmes se posaient, les uns mettant en cause l'unicité de la solution, et d'autres exigeant une reformulation du modèle. Dans tous ces cas, on considèrera le système comme mal formulé et on le rejettera.

Remarque :

Si une ligne de C était combinaison linéaire de lignes de A, on montrerait de même que cela impliquerait une relation entre les dérivées, du type : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overset{\circ}{x}_i = 0$, ce qui a pour effet d'empêcher le système d'être asymptotiquement stable.

IV-1.2.2. Conditions de stabilité simple et de stabilité asymptotique -

Soit le système (2), et soit une matrice carrée $P_{s\,x\,s}$ s.d.p..P étant s.d.p., alors :

$$\forall\, Y \in \mathbb{R}^s \quad , \quad Y^T P Y = 0 \iff Y = 0_s \quad .$$

Si : $Y = B_{sxn} . X \quad$ où $\quad X \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$Y^T P Y = \left(X^T B^T_{nxs}\right) . P \left(B_{sxn} . X\right) = 0 \iff B_{sxn} . X = 0_s \quad .$$

Mais $BX = 0_s$ signifie que X appartient au noyau de B,ce qu'on notera :

$$X \in Ker(B) \quad , \text{ ou : } \quad X \in K(B) \quad .$$

Donc la matrice $B^T_{n\,x\,s} \cdot P_{s\,x\,s} \cdot B_{s\,x\,n}$ est une matrice carrée d'ordre n, et s.d.n.n. Comme le système (2) vérifie à tout moment l'ensemble des contraintes :

$$C_{(n-s)xn} . X = 0_{n-s} \text{ , alors :}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \text{ , } X(t) \in K(C) \quad .$$

On va donc étudier la stabilité du système (2) dans $Ker(C_{(n-s)\,x\,n})$ et la stabilité dans $\mathbb{R}^n$ en découlera nécessairement car : $Ker(C_{(n-s)\,x\,n}) \subset \mathbb{R}^n$.

On suppose que le système est bien formulé (cf. § IV-1.2.1.). Cela signifie :

$$\det\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \det(B') \neq 0 \quad \text{, mais aussi :}$$

rang (B) = s et rang (C) = n-s .

Comme $\det\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \neq 0$, cela donne :

$$K(B_{s\times n}) \cap K(C_{(n-s)\times n}) = \{0_n\} .$$

(cela est évident, car sinon il existerait $X \in R^n$, avec : $X \neq 0_n$ tel que :

$$X \in K(B) \quad et \quad X \in K(C)$$

$$\left.\begin{array}{l} X \in K(B) \Leftrightarrow B.X = 0_s \\ X \in K(C) \Leftrightarrow C.X = 0_{n-s} \end{array}\right\} \text{les lignes de B et C ne sont pas indépendantes.}$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = 0 \quad \text{, ce qui est impossible).}$$

Soit donc $X \neq 0_n$. Si on a : $X \in$ Ker $(C_{(n-s)\times n})$, alors :

$$X \in K(C) \Rightarrow X \notin K(B) .$$

Soit alors la forme bilinéaire :

$$V(X) = X^T.B^T.P.B.X$$

On a vu que $B^TP\,B$ est s.d.n.n. Donc V(X) est définie non négative sur $\mathbb{R}^n$. Mais comme l'on se limite à Ker $(C_{(n-s)\times n})$, alors V(X) y est d.p. (définie positive). Sa dérivée eulérienne $\overset{\circ}{V}(X)$ est :

$$\dot{V}(X) = \dot{X}^T B^T_{n\times s}.P_{s\times s}.B_{s\times n}.X + X^T.B^T_{n\times s}.P_{s\times s}.B_{s\times n}.\dot{X}$$

Or : $A_{s\times n}.X + B_{s\times n}.\dot{X} = 0_s$

$$\Rightarrow B_{s\times n}.\dot{X} = -A_{s\times n}.X$$

$$\Leftrightarrow \dot{X}^T.B^T_{n\times s} = -X^T.A^T_{n\times s}$$

D'où : $\dot{V}(X) = -X^T.A^T_{n\times s}.P_{s\times s}.B_{s\times n}.X - X^T.B^T_{n\times s}.P_{s\times s}.A_{s\times n}.X$

$$= -X^T(A^TPB + B^TPA)X$$

Posons : $H = A^TPB + B^TPA \quad \Rightarrow \dot{V}(X) = -X^THX$

Si H est s.d.p. sur Ker $(C_{(n-s)\times n})$, alors $\overset{\circ}{V}(X) < 0$ et le système est asymptotiquement stable.

Si H est s.d.n.n. sur $Ker(C_{(n-s)\,x\,n})$, alors $\dot{\overset{\circ}{V}}(X) \leqslant 0$ et le système est simplement stable. D'où le théorème :

"Une condition suffisante de stabilité asymptotique (respectivement simple) du système (2) est que la matrice $H_{n\,x\,n}$ définie par :

$$H_{n\times n} = A^{T}_{n\times s} \cdot P_{s\times s} \cdot B_{s\times n} + B^{T}_{n\times s} \cdot P_{s\times s} \cdot A_{s\times n}$$

définisse sur Ker $(C_{(n-s)\,x\,n})$ une fonction définie positive (respectivement non négative)".

Ce théorème est intéressant, certes, mais il a le défaut de ne pas être d'une utilisation très pratique, car il ne fait intervenir les contraintes algébriques qu'après la définition de H : on définit une matrice H à partir des équations différentielles, et donc à partir des matrices A et B, puis on essaie de voir le signe de H dans Ker (C). Reste à trouver une expression de Ker(C), et ce théorème, dans sa forme actuelle, ne nous renseigne en rien à ce sujet. C'est pourquoi nous allons essayer dans le paragraphe suivant de le reformuler en tenant compte de ces critiques, et en rendant son utilisation plus aisée.

IV-1.2.3. Reformulation pratique du théorème de stabilités simple et asymptotique -

Nous énoncerons d'abord le théorème et donnerons ensuite la méthode par laquelle il a été déduit du théorème précédent.

Théorème : "Une condition suffisante de stabilité asymptotique (respectivement simple) du système (2) est qu'existent trois matrices :

$P_{s\,x\,s}$ s.d.p.

$H_{s\,x\,s}$ s.d.p. (respectivement s.d.n.n.)

$U_{n\,x\,s}$ de rang s ,

telles que les 2 relations suivantes soient vérifiées :

$$C_{(n-s)\times n} \cdot U_{n\times s} = 0_{(n-s)\times s}$$
$$U^{T}_{s\times n} \cdot \left(A^{T}_{n\times s} \cdot P_{s\times s} \cdot B_{s\times n} + B^{T}_{n\times s} \cdot P_{s\times s} \cdot A_{s\times n} \right) \cdot U_{n\times s} = H_{s\times s} \text{ "} .$$

En effet, on suppose implicitement que l'on a vérifié que le système (2) était bien formulé. Par conséquent $C_{(n-s)\,x\,n}$ est de rang maximal, soit (n-s). On peut considérer $C_{(n-s)\,x\,n}$ comme étant la matrice d'une application g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n-s}$ telle que :

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-s}$$
$$X \longmapsto g(X) = CX$$

Or on sait que la dimension de Im(g)(image de g ou g ($\mathbb{R}^n$)) est égale au rang de la matrice associée à g, soit rang (C).

$$\Rightarrow \dim \ Im(g) = rg(C) = n-s$$

Or : $\dim \mathrm{Ker}(g) + \dim \mathrm{Im}(g) = \dim \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Ker}(g) = \dim \mathbb{R}^n - \dim \mathrm{Im}(g)$

$= n - (n-s)$

$= s$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Ker}(g) = s \iff \dim K(C) = s$.

D'autre part construisons une matrice $U_{n \times s}$ de rang maximal, donc égal à s, qui soit orthogonale à $C_{(n-s) \times n}$. On a donc :

$$C_{(n-s)\times n} \cdot U_{n\times s} = 0_{(n-s)\times s} \quad .$$

On peut considérer $U_{n \times s}$ comme la matrice d'une application f de $\mathbb{R}^s$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$f : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$Y \longmapsto f(Y) = U_{n\times s} \cdot Y$$

On a alors : $\forall\, Y \in \mathbb{R}^s,\ C_{(n-s)\times n}\,(U_{n\times s} \cdot Y) = (C_{(n-s)\times n} \cdot U_{n\times s}) \cdot Y$

$= 0_{(n-s)\times s} \cdot Y$

$= 0_{n-s}$

Donc l'image par U (ou f) de tout vecteur de $\mathbb{R}^s$ appartient à $\mathrm{Ker}(C_{(n-s) \times s})$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subset K(C) \quad .$$

Or on a montré que : $\dim K(C) = s$.

Comme U est de rang maximal, égal à s par construction, on a alors :

$$\dim \mathrm{Im}(f) = rg(U) = s \quad .$$

On a donc : $\mathrm{Im}(f) \subset K(C)$

$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim K(C) = s$

Cela donne donc : $\mathrm{Im}(f) = K(C)$.

Il existe donc une bijection entre Im(f) et Ker(C), et on peut écrire :

$$Z \in K(C) \iff \exists\, Y \in \mathbb{R}^s \ /\ Z = U.Y$$

Reprenons alors la démonstration du théorème précédent au niveau de la construction de la fonction définie positive (d.p) sur $\mathrm{Ker}\,(C_{(n-s) \times n})$:

$$V(X) = X^T B^T P B X \quad , \quad X \in K(C) \quad .$$

Comme $X_n \in \mathrm{Ker}(C_{(n-s) \times s})$, d'après le résultat précédent on pourra écrire :

$$X \in K(c) \Leftrightarrow \exists\, Y \in \mathbb{R}^s \;/\; X = U.Y$$

$$\Rightarrow V(Y) = Y^T U^T B^T P B U Y$$

D'où : $\dot{V}(Y) = \dot{Y}^T U^T B^T P B U Y + Y^T U^T B^T P B U \dot{Y}$

Or : $X = UY \Leftrightarrow \dot{X} = U\dot{Y}$

$$\Rightarrow B\dot{X} = BU\dot{Y}$$

Or: $B\dot{X} + AX = 0_s \Leftrightarrow B\dot{X} = -AX$

$$\Rightarrow B\dot{X} = -AX = BU\dot{Y}$$

$$\Leftrightarrow BU\dot{Y} = -AX = -AUY$$

et : $(BU\dot{Y})^T = -(AUY)^T$

$$\Leftrightarrow \dot{Y}^T U^T B^T = -Y^T U^T A^T$$

D'où : $\dot{V}(Y) = -Y^T U^T A^T P B U Y - Y^T U^T B^T P A U Y$

$$= -Y^T (U^T A^T P B U + U^T B^T P A U) Y$$

$$\Rightarrow \dot{V}(Y_s) = -Y^T_{1\times s} \left(U^T_{s\times n} . A^T_{n\times s} . P_{s\times s} . B_{s\times n} . U_{n\times s} + U^T_{s\times n} . B^T_{n\times s} . P_{s\times s} . A_{s\times n} . U_{n\times s}\right) . Y_s$$

Posons :

$$H_{s\times s} = U^T (A^T P B + B^T P A) U$$

Si $H_{s\,x\,s}$ est s.d.p., et compte tenu du fait que : V(Y) est d.p., alors :

$$\dot{V}(Y) < 0 \Rightarrow$$ stabilité asymptotique .

Si $H_{s\,x\,s}$ est s.d.n.n., alors :

$$\dot{V}(Y) \leq 0 \Rightarrow$$ stabilité simple.

IV-1.2.4. Théorème d'instabilité des systèmes (2) -

"Une condition suffisante d'instabilité du système (2) est qu'existent trois matrices :

$P_{s\,x\,s}$	symétrique mais non définie positive
$H_{s\,x\,s}$	s.d.p.
$U_{n\,x\,s}$	de rang maximal

qui vérifient les deux relations :

$$C_{(n-s)\times n} . U_{n\times s} = 0_{(n-s)\times s}$$

$$U^T_{s\times n} \left(A^T_{n\times s} . P_{s\times s} . B_{s\times n} + B^T_{n\times s} . P_{s\times s} . A_{s\times n}\right) . U_{n\times s} = H_{s\times s}$$ "

On prend donc la forme quadratique : $V(Y) = Y^T U^T B^T P B U Y$

et alors $\overset{\circ}{V}(Y_s) = - Y^T U^T (A^T P B + B^T P A) U Y$ (par les mêmes calculs que ci-dessus).

Si P n'est pas définie positive, alors elle est s.d.n.p. ou s.s.v. ou s.d.n.n.

1°) Supposons P s.d.n.p. Soit alors : P' =-P. P' est donc s.d.n.n.

Soit alors : $$V_1(Y_s) = Y^T U^T B^T P' B U Y = -Y^T U^T B^T P B U Y$$

$V_1(Y_s) \gtrsim 0$ sur Ker(C). Sa dérivée eulérienne sera :

$$\dot{V}_1(Y_s) = -Y^T U^T (A^T P' B + B^T P' A) U Y$$

En remplaçant P' par -P, on a alors :

$$\dot{V}_1(Y_s) = [Y^T U^T (A^T P B + B^T P A) U Y]$$

Or : $U^T (A^T P B + B^T P A) U = H$ est s.d.p. par hypothèse.

$$\overset{\circ}{V}_1(Y_s) > 0 \text{ sur } \mathbb{R}^s .$$

On a donc sur $\mathbb{R}^s$: $V_1(Y_s) \gtrsim 0$

$$\dot{V}_1(Y_s) > 0$$

D'après le premier théorème d'instabilité de LYAPOUNOV (cf § III-2.4.3), le système est instable.

2°) Supposons maintenant que P soit s.s.v.

Alors la matrice : $B^T_{n\,x\,s} \cdot P_{s\,x\,s} \cdot B_{s\,x\,n}$ est elle aussi s.s.v., de même que :

$$B^T(-P).B = B^T P' B$$

On définit alors la forme quadratique :

$$V_2(Y_s) = Y^T U^T B^T P' B U Y$$

Cette forme quadratique est elle aussi de signe varié. Elle divise $\mathbb{R}^s$ en deux régions Ω_1 et Ω_2 séparées par une hyper-surface de $\mathbb{R}^s$ sur laquelle $V_2(Y_s)$ s'annule . Dans une des régions Ω_1, $V_2(Y_s)$ reste strictement positive, et dans Ω_2 $V_2(Y_s)$ est strictement négative (pour plus de détails sur cette démonstration, se reporter au 3° de la condition nécessaire du théorème asymptotique de LYAPOUNOV § IV-1.1.2.). En faisant les mêmes calculs que précédemment, on trouve que la dérivée eulérienne $\overset{\circ}{V}_2(Y_s)$ est égale à :

$$\dot{V}_2(Y_s) = -Y^T U^T (A^T P' B + B^T P' A) U Y$$

En remplaçant P' par -P, on a alors : $\dot{V}_2(Y_s) = Y^T U^T (A^T P B + B^T P A) U Y$.

Or : $H = U^T(A^T P B + B^T P A)\, U$ est s.d.p. par hypothèse. Donc :

$$\overset{\circ}{V}_2(Y_s) > 0$$

On a donc dans Ω_1 : $V_2(Y_s) > 0$

$$\dot{V}_2(Y_s) > 0$$

D'après le théorème d'instabilité de ČETAEV (cf. § III-2.4.5) le système est instable.

3°) Si P est s.d.n.n., alors H ne peut pas être définie, ce qui est contraire à l'hypothèse. D'où le théorème.

On va maintenant énoncer un théorème analogue à celui du § IV-1.1.2., et qui généralise aux systèmes (2) la condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique.

IV-1.2.5. C.N.S. de stabilité asymptotique -

Soit le système (2) : $\begin{cases} A_{s\times n} \cdot X + B_{s\times n} \cdot \dot{X} = 0_s \\ C_{(n-s)\times n} \cdot X = 0_{n-s} \end{cases}$

Soit $U_{n \times s}$ une matrice de rang maximal-égal à s - orthogonale à $C_{(n-s) \times n}$:

$$C_{(n-s)\times n} \cdot U_{n\times s} = 0_{(n-s)\times s}$$

Soit $H_{s \times s}$ une matrice s.d.p. Le théorème s'énonce alors ainsi :

"Une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique du système (2) sous les conditions ci-dessus définies sur $H_{s \times s}$ et $U_{n \times s}$, est que l'équation matricielle - où $P_{s \times s}$ est une matrice symétrique inconnue - :

$$U^T_{s\times n}\left(A^T_{n\times s} \cdot P_{s\times s} \cdot B_{s\times n} + B^T_{n\times s} \cdot P_{s\times s} \cdot A_{s\times n}\right) \cdot U_{n\times s} = H_{s\times s}$$

admette une solution P et que la matrice P ainsi trouvée soit s.d.p."

Cette condition est évidemment suffisante (cf. § IV-1.2.3.). Elle est aussi nécessaire, car si le système n'admet pas de solution P, un raisonnement analogue au théorème IV-1.1.2. entraînerait que le système ne pourrait plus être asymptotiquement stable. Si donc il a une solution P, et que P est s.d.p., le théorème est démontré. Si P n'est pas s.d.p., on vient de voir (cf. § IV-1.2.4.) que le système serait alors instable, ce qui achève de démontrer le théorème.

Remarque -

Ce théorème est fondamental, et on l'utilisera intensivement dans l'étude des systèmes.

IV-1.2.6. Cas particulier des systèmes implicites différentiels : s = n -

Ces systèmes s'écrivent :

$$A_{n\times n} \cdot X + B_{n\times n} \cdot \dot{X} = 0_n \qquad (3)$$

On a donc :

$$C_{(n-s)\times n} = C_{o\times n}$$

On prend alors : $U_{n\times s} = U_{n\times n} = I_n \iff U^T = U = I_n$

On étudiera ces systèmes avec les mêmes théorèmes que précédemment, à condition d'y remplacer $U_{n\times s}$ par I_n. On aura ainsi :

" Une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique du système (3) est que l'équation matricielle, où $P_{n\times n}$ est une matrice inconnue, et $H_{n\times n}$ une matrice s.d.p. :

$$A^T_{n\times n} \cdot P_{n\times n} \cdot B_{n\times n} + B^T_{n\times n} \cdot P_{n\times n} \cdot A_{n\times n} = H_{n\times n}$$

admette une solution $P_{n\times n}$, et que celle matrice $P_{n\times n}$ soit s.d.p.".

De même la condition d'instabilité :

"Une condition suffisante d'instabilité du système (3) est qu'existent deux matrices

$P_{n\times n}$ non définie positive

$H_{n\times n}$ s.d.p.

telles que :

$$A^T_{n\times n} \cdot P_{n\times n} \cdot B_{n\times n} + B^T_{n\times n} \cdot P_{n\times n} \cdot A_{n\times n} = H_{n\times n} \cdot "$$

Quant à la condition suffisante de stabilité asymptotique (respectivement simple) elle s'écrit :

"Une condition suffisante de stabilité asymptotique (respectivement simple) est qu'existent deux matrices

$P_{n\times n}$: s.d.p.

$H_{n\times n}$: s.d.p. (respectivement s.d.n.n.)

telles que

$$A^T_{n\times n} \cdot P_{n\times n} \cdot B_{n\times n} + B^T_{n\times n} \cdot P_{n\times n} \cdot A_{n\times n} = H_{n\times n} \cdot "$$

Les systèmes linéaires explicites

$$\dot{X} = AX$$

seront un cas particulier du cas précédent, et on pourra leur appliquer les mêmes théorèmes à

condition d'y remplacer :

$$B_{n\,x\,n} \text{ par } I_n$$

et $$A_{n\,x\,n} \text{ par } -A_{n\,x\,n} \quad .$$

IV-2. PROPAGATION DES ERREURS DANS LES SIMULATIONS : /-25-/ -

On se propose maintenant d'appliquer les résultats obtenus à l'étude de la propagation des erreurs dans le cadre des simulations de modèles. On se place dans le cadre général où le modèle est donné sous la forme implicite suivante :

$$F_s(X,\overset{\circ}{X},\underline{a}) = 0_s$$

$$F_{n-s}\,(X,\underline{a}) = 0_{n-s}$$

Le vecteur X est le vecteur d'état du système, $\overset{\circ}{X}$ son vecteur dérivé par rapport au temps, et $\underline{a}$ un vecteur paramètre. On a donc un système caractérisé par s relations contenant toutes le vecteur $\overset{\circ}{X}$, donc des relations différentielles, et (n-s) relations algébriques, appelées contraintes du système. Le cas où ces relations sont linéaires en X et $\overset{\circ}{X}$ est le cas particulier qu'on a traité précédemment (cf. § IV-1).

Quant au vecteur paramètre $\underline{a}$, il a été introduit explicitement pour répondre au besoin spécifique suivant : quand on cherche à modéliser un phénomène physique ou économique ou de toute autre nature, on n'en connaît souvent au premier abord que certaines données empiriques et des caractéristiques générales et imprécises, caractéristiques que l'on a généralement du fait de l'appartenance présumée de ce phénomène à une certaine classe de modèles (les présomptions sont guidées par l'expérience et l'observation entre autres). On fait alors des essais sur ce modèle général et on ajuste le vecteur paramètre $\underline{a}$ pour obtenir des résultats dus au modèle, qui puissent correspondre aux données empiriques que l'on a mesurées sur le phénomène lui-même.

Il faut rappeler qu'un même phénomène peut être représenté par différents modèles possibles, qui peuvent avoir des comportements différents. Il ne faut donc pas confondre propriétés du modèle et propriétés du phénomène. C'est pourquoi, parmi tous les modèles possibles, on cherchera celui qui puisse le mieux représenter le phénomène pour un certain type de fonctionnement (alors qu'un autre modèle pourrait être meilleur pour un autre type de fonctionnement). La simulation numérique aura alors pour but de donner une représentation numérique de la solution mathématique du modèle. Cette simulation est sujette à des erreurs qui peuvent être de trois natures différentes :

- des erreurs d'initialisation
- des erreurs de paramètres
- des erreurs de résolution numérique.

La propriété essentielle que l'on exige du modèle est donc qu'il puisse représenter fidèlement le phénomène physique, dans le domaine de comportement pour lequel il a été choisi,

et cela non seulement dans les conditions initiales où tout se passe parfaitement, mais encore quand le système est perturbé par une ou plusieurs causes d'erreurs, parmi celles qui ont été citées. On désire donc que les erreurs qui s'introduisent dans le modèle par le biais d'une des sources d'erreurs possibles, ne soient pas amplifiées indéfiniment, mais qu'au contraire elles tendent à s'annuler au cours du temps, ou tout au moins qu'elles restent bornées. On va donc étudier la propagation des erreurs dans les simulations. Pour cela on utilisera les équations variationnelles, c'est-à-dire un système d'équations algébro-différentielles, supposées représenter le comportement dynamique des erreurs.

IV-2.1. Equations régissant le comportement des erreurs pour un modèle donné -

Supposons donc que pour représenter un phénomène, on ait choisi un modèle régi par le système d'équations implicites suivant :

$$\left.\begin{aligned} F_s(X, \dot{X}, \underline{a}) &= 0_s \quad (41) \\ F_{n-s}(X, \underline{a}) &= 0_{n-s} \quad (42) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

X, $\overset{\circ}{X}$ et $\underline{a}$ sont donc respectivement le vecteur d'état du système, son vecteur dérivé et le vecteur paramètre, représentant l'état théorique exact du modèle. Au cours du fonctionnement du modèle, des erreurs s'introduisent. On est ainsi amené à résoudre en fait un système plus ou moins proche du précédent, où l'état du système est représenté par les vecteurs empiriques X_1, $\overset{\circ}{X}_1$, $\underline{a}_1$. On a alors :

$$\left.\begin{aligned} F_s(X_1, \dot{X}_1, a_1) &= \underline{\mu}_s(t) \quad (41') \\ F_{(n-s)}(X_1, \underline{a}_1) &= \underline{\nu}_{(n-s)}(t) \quad (42') \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

On pose : $X_1 = X + \underline{e}$, où $\underline{e}$ est le vecteur écart (ou erreur) entre la solution théorique exacte et les valeurs mesurées empiriquement. On a alors :

$$\dot{X}_1 = \dot{X} + \dot{e} \qquad et : \quad \underline{a}_1 = \underline{a} + \underline{\Delta a} \ .$$

Si les erreurs ne sont pas trop grandes, on pourra écrire le développement de TAYLOR du système (4') autour de la solution exacte, en se limitant aux termes d'ordre 1. Cela revient donc à linéariser le système (4') autour de la solution exacte. On suppose, bien-entendu, que toutes les conditions nécessaires à ce développement sont réalisées. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} F_s(X_1, \dot{X}_1, \underline{a}_1) &= F_s(X+\underline{e}, \dot{X}+\dot{\underline{e}}, \underline{a}+\underline{\Delta a}) = \underline{\mu}_s(t) \\ &= F_s(X, \dot{X}, \underline{a}) + \left\langle \underline{e}^T, \frac{\partial F_s}{\partial X} \right\rangle + \left\langle \dot{\underline{e}}^T, \frac{\partial F_s}{\partial \dot{X}} \right\rangle + \left\langle \underline{\Delta a}^T, \frac{\partial F_s}{\partial \underline{a}} \right\rangle \end{aligned}$$

Or : $F_s(X, \dot{X}, \underline{a}) = 0_s$ (car c'est la solution exacte).

D'où :

$$\left\langle \left(\frac{\partial F_s}{\partial X}\right)^T, \underline{e} \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial F_s}{\partial \dot{X}}\right)^T, \dot{\underline{e}} \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial F_s}{\partial \underline{a}}\right)^T, \underline{\Delta a} \right\rangle = \underline{\mu}_s(t)$$

De même :

$$F_{(n-s)}(X_1, a_1) = F_{n-s}(X+\underline{e}, \underline{a}+\Delta\underline{a}) = \underline{\nu}_{n-s}(t)$$
$$= F_{n-s}(X, \underline{a}) + \langle \underline{e}^T, \frac{\partial F_{n-s}}{\partial X} \rangle + \langle \Delta\underline{a}^T, \frac{\partial F_{n-s}}{\partial \underline{a}} \rangle = \underline{\nu}_{n-s}(t)$$

Or : $F_{(n-s)}(X, \underline{a}) = 0_{n-s}$ (solution exacte).

D'où :

$$\langle \underline{e}^T, \frac{\partial F_{n-s}}{\partial X} \rangle + \langle \Delta\underline{a}^T, \frac{\partial F_{n-s}}{\partial \underline{a}} \rangle = \underline{\nu}_{n-s}(t) .$$

On pose alors :

$$A_{s\times n} = \frac{\partial F_s}{\partial X} \quad , \quad B_{s\times n} = \frac{\partial F_s}{\partial \dot{X}} \quad , \quad S^1_{s\times q} = \frac{\partial F_s}{\partial \underline{a}}$$

$$C_{(n-s)\times n} = \frac{\partial F_{n-s}}{\partial X} \quad , \quad S^2_{(n-s)\times q} = \frac{\partial F_{n-s}}{\partial \underline{a}}$$

q désigne la dimension du vecteur paramètre $\underline{a}$.

Le système variationnel peut alors s'écrire :

$$A_{s\times n} \cdot \underline{e} + B_{s\times n} \cdot \dot{\underline{e}} + S^1_{s\times q} \cdot \Delta\underline{a} = \underline{\mu}_s(t)$$
$$C_{(n-s)\times n} \cdot \underline{e} + S^2_{(n-s)\times q} \cdot \Delta\underline{a} = \underline{\nu}_{n-s}(t) .$$

Dans un premier temps, on étudiera la propagation d'erreurs quand la seule erreur non nulle est $\underline{e}$. Dans un deuxième temps, on examinera alors le cas général et on énoncera la condition de non-propagation correspondante.

IV-2.2. Condition de non-propagation de l'erreur pour $\Delta\underline{a} = 0_q, \underline{\mu}_s = 0_s, \underline{\nu}_{n-s} = 0_{n-s}$

Si donc on a :

$$\Delta\underline{a} = 0_q$$
$$\underline{\mu}_s(t) = 0_s$$
$$\underline{\nu}_{n-s}(t) = 0_{n-s} \quad ,$$

le système (5) se réduit à :

$$\left.\begin{aligned} A_{s\times n} \cdot \underline{e} + B_{s\times n} \cdot \dot{\underline{e}} &= 0_s \\ C_{(n-s)\times n} \cdot \underline{e} &= 0_{n-s} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

On constate immédiatement que le système variationnel (6) est du même type que le système (2) :

$$A_{s\times n} \cdot X + B_{s\times n} \cdot \dot{X} = 0_s$$
$$C_{(n-s)\times n} \cdot X = 0_{n-s}$$

Par conséquent on pourra appliquer sans modification aucune les résultats concernant

les sytèmes (2) aux systèmes (6). On aura en particulier le théorème suivant de stabilité asymptotique :

"Une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique de l'erreur $\underline{e}$ ($\Leftrightarrow \underline{e} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0_n$) vérifiant le système (6) est que l'équation matricielle, où $P_{s\,x\,s}$ est une matrice symétrique inconnue, $H_{s\,x\,s}$ une matrice s.d.p. et $U_{n\,x\,s}$ une matrice de rang s orthogonale à $C_{(n-s)\,x\,n}$, et qui s'écrit :

$$U^T_{s\times n}\left(A^T_{n\times s}\ P_{s\times s}\ B_{s\times n} + B^T_{n\times s}\ P_{s\times s}\ A_{s\times n}\right) U_{n\times s} = H_{s\times s}$$

admette une solution $P_{s\,x\,s}$ qui soit s.d.p. "

IV-2.3. Condition de stabilité de l'erreur dans le système général (5) -

On est donc en présence d'erreurs locales et d'erreurs de paramètres :

$$\underline{\mu}_s \neq 0_s \quad , \quad \underline{\nu}_{n-s} \neq 0_{n-s} \quad , \quad \Delta\underline{a} \neq 0_q \ .$$

On va alors montrer que dans ce cas l'écart $\underline{e}$ entre la solution exacte et la solution empirique restera borné, à condition que le théorème du paragraphe IV-2.2. soit vérifié, ou en d'autres termes, que le système (6) associé soit lui-même asymptotiquement stable. On énoncera d'abord le théorème et on donnera ensuite sa démonstration.

Théorème -

"Une condition nécessaire et suffisante de non-propagation des erreurs dans le système (5), où les erreurssurles paramètres et les erreurs locales sont bornées et vérifient :

$$\|\underline{\mu}_s\| \leq \varepsilon_\mu \quad , \quad \|\nu_{n-s}\| \leq \varepsilon_\nu \quad , \quad \|\Delta\underline{a}\| \leq \varepsilon_a$$

est que le système (6) associé :

$$A_{s\times n}\cdot \underline{e} + B_{s\times n}\cdot \dot{\underline{e}} = 0_s$$
$$C_{(n-s)\times n}\cdot \underline{e} = 0_{n-s}$$

soit lui-même asymptotiquement stable, ce qui est équivalent à dire que l'équation matricielle, où $P_{s\,x\,s}$ est une matrice inconnue, $H_{s\,x\,s}$ une matrice s.d.p., et $U_{n\,x\,s}$ une matrice de rang s orthogonale à $C_{(n-s)\,x\,n}$, équation qui s'écrit :

$$U^T_{s\times n}\left(A^T_{n\times s}\cdot P_{s\times s}\cdot B_{s\times n} + B^T_{n\times s}\cdot P_{s\times s}\cdot A_{s\times n}\right) U_{n\times s} = H_{s\times s}$$

admette une solution $P_{s\,x\,s}$ qui soit s.d.p.

Dans ces conditions, si on écrit :

$\underline{e} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$, où $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ représentent les composantes de $\underline{e}$ sur

Ker $(B_{s \times n})$ et Ker$(C_{(n-s) \times n})$ respectivement, alors on a :

$$\lim_{t \to \infty} \|e_2\|_2 = 2(\varepsilon_\mu + \sigma_1 . \varepsilon_a) \frac{p\, b\, u}{h}$$

$$\|e_1\|_2 \leq \frac{\varepsilon_\nu + \sigma_2 \varepsilon_a}{\lambda_{min}}$$

On a ainsi noté :

$$\|B^T B\|_2 = b^2$$

$$\|S_1^T S_1\|_2 = \sigma_1^2$$

$$\|P\|_2 = p$$

$$\|U^T U\|_2 = u$$

$$\|S_2^T S_2\|_2 = \sigma_2^2$$

λ_{min} = plus petite valeur propre de $(C^T . C)$

$$h = \min_{\|\delta y\|_2 = 1} \delta y^T . U^T H U \, \delta y$$

Démonstration -

Soit la fonction :

$$V(\underline{e}) = \underline{e}^T B^T P B \underline{e}$$

Si on décompose $\underline{e}$ sur Ker(B) et Ker(C), comme le permet la condition de bonne formulation, on a alors :

$$\underline{e} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$$

avec : $\underline{e}_1 \in K(B)$ et $\underline{e}_2 \in K(C)$

Donc :

$$B\underline{e} = B(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$$

$$= B\underline{e}_2$$

$$\Rightarrow V(\underline{e}) = \underline{e}^T B^T P B \underline{e}$$

$$= \underline{e}_2^T B^T P B \underline{e}_2$$

Calculons sa dérivée eulérienne :

$$\dot{V}(\underline{e}) = \dot{\underline{e}}_2^T B^T P B \underline{e}_2 + \underline{e}_2^T B^T P B \dot{\underline{e}}_2$$

Or : $B\dot{\underline{e}}_2 = \underline{\mu}_s - S^1 . \Delta \underline{a} - A\underline{e}_2 \iff \dot{\underline{e}}_2^T B^T = \underline{\mu}_s^T - \Delta \underline{a}^T . S^{1T} - \underline{e}_2^T . A^T$

$$\Rightarrow \dot{V}(\underline{e}) = (\underline{\mu}_s^T - \Delta \underline{a}^T . \underline{S}^{1T} - \underline{e}_2^T . A^T) P B \underline{e}_2 + \underline{e}_2^T B^T P (\underline{\mu}_s - S^1 \Delta \underline{a} - A \underline{e}_2)$$

$$= (\underline{\mu}_s^T P B \underline{e}_2 + \underline{e}_2^T B^T P \underline{\mu}_s) - (\Delta a^T S^{1T} P B \underline{e}_2 + \underline{e}_2^T B^T P S^1 \Delta \underline{a})$$

$$- (\underline{e}_2^T A^T P B \underline{e}_2 + \underline{e}_2^T B^T P A \underline{e}_2)$$

On veut déterminer le signe de $\dot{V}(\underline{e})$. On peut alors écrire :

$$f_1 = \underline{\mu_s}^T P B \underline{e_2} + \underline{e_2}^T B^T P \underline{\mu_s}$$

$$f_2 = -\left(\Delta \underline{a}^T S^{-1^T} P B \underline{e_2} + \underline{e_2}^T B^T P S^{-1} \Delta \underline{a}\right)$$

On a alors : $f_1 + f_2 \leq \|f_1\|_2 + \|f_2\|_2$

$$\|f_1\|_2 = \|\underline{\mu_s}^T P B \underline{e_2} + \underline{e_2}^T B^T P \underline{\mu_s}\|_2$$

$$\leq 2 . \|\underline{\mu_s}^T P B . \underline{e_2}\|_2$$

$$\leq 2 \|\underline{\mu_s}\|_2 . \|P\|_2 . \|B \underline{e_2}\|_2$$

On utilise pour cela les propriétés suivantes :

$$\|X^T\| = \|X\| \quad si \quad X \in \mathbb{R}^m$$

$$< X_1^T, X_2 > \leq \|X_1\|_2 . \|X_2\|_2 \quad \text{(relation de CAUCHY-SCHWARTZ)}$$

$$\|A . B\|_2 \leq \|A\|_2 . \|B\|_2$$

$$\|A . X\|_2 \leq \|A\|_2 . \|X\|_2$$

avec $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^m$ et $A, B \in \mathcal{M}(m; \mathbb{R})$.

D'autre part, si $B_{s \times n}$ est une matrice rectangle, on a :

$$\|B \underline{e_2}\|_2^2 = \|\underline{e_2}^T . B^T . B . \underline{e_2}\|_2$$

$$\leq \|\underline{e_2}^T\|_2 . \|B^T B \underline{e_2}\|_2$$

$$\leq \|\underline{e_2}\|_2 . \|B^T B\|_2 . \|\underline{e_2}\|_2$$

$$\leq \|B^T . B\|_2 . \|\underline{e_2}\|_2^2$$

$$\Rightarrow \|B . \underline{e_2}\|_2 \leq \left(\|B^T . B\|_2\right)^{1/2} . \|\underline{e_2}\|_2$$

Donc :

$$\|f_1\|_2 \leq 2 . \|\underline{\mu_s}\|_2 . \|P\|_2 \left(\|B^T B\|_2\right)^{1/2} . \|\underline{e_2}\|_2$$

$$\leq 2 \|P\|_2 . \left(\|B^T B\|_2\right)^{1/2} . \varepsilon_\mu . \|e_2\|_2$$

De même :

$$\|f_2\|_2 \leq 2 \|\Delta \underline{a}^T S^{-1^T}\|_2 . \|P B \underline{e_2}\|_2$$

$$\leq 2 \|P\|_2 . \left(\|B^T B\|_2\right)^{1/2} . \|\underline{e_2}\|_2 . \left(\|S^{-1^T} S^{-1}\|_2\right)^{1/2} . \|\Delta \underline{a}\|_2$$

$$\leq 2 \|P\|_2 . \left(\|B^T B\|_2\right)^{1/2} . \left(\|S^{-1^T} S^{-1}\|_2\right)^{1/2} . \varepsilon_a . \|\underline{e_2}\|_2$$

Enfin : $\underline{e_2}^T A^T P B \underline{e_2} + \underline{e_2}^T P B A \underline{e_2} = \underline{e_2}^T \left(A^T P B + B^T P A\right) \underline{e_2}$

Par hypothèse :

$$H = A^T P B + B^T P A \quad \text{s.d.p.}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{e}_2^T (A^T P B + B^T P A) \underline{e}_2 = \underline{e}_2^T H \underline{e}_2$$

$\underline{e}_2 \in K(C)$. On peut donc écrire :

$$\underline{e}_2 = U . \delta y \quad , \text{ où } \quad C U = 0_{(n-s)\times s}$$

$$\Rightarrow \underline{e}_2^T H \underline{e}_2 = \delta y^T U^T H U \, \delta y$$

$$\geqslant \min_{\|\delta y\|_2 = 1} \delta y^T U^T H U \, \delta y$$

$$\geqslant \left(\min_{\|\delta y\|_2 = 1} \delta y^T U^T H U \, \delta y\right) . \|\delta y\|_2^2 \qquad (\text{car } \|\delta y\|_2 = 1)$$

Or : $\|\underline{e}_2\|_2^2 = \|U . \delta y\|_2^2 \leqslant \|U^T U\|_2 . \|\delta y\|_2^2$

$$\Rightarrow \quad \|\delta y\|_2^2 \geqslant \frac{\|\underline{e}_2\|_2^2}{\|U^T U\|_2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{e}_2^T H \underline{e}_2 \geqslant \frac{\|\underline{e}_2\|_2^2}{\|U^T U\|_2} . \min_{\|\delta y\|_2 = 1} \delta y^T U^T H U \, \delta y$$

Donc : $$- \underline{e}_2^T H \underline{e}_2 \leqslant - \frac{\|\underline{e}_2\|_2^2}{\|U^T U\|_2} \min_{\|\delta y\|_2 = 1} \delta y^T U^T H U \, \delta y$$

Si on pose alors :

$$\|B^T B\|_2 = b^2$$

$$\|S^{-1T} . S^{-1}\|_2 = \sigma_1^{-2}$$

$$\|U^T . U\|_2 = u$$

$$\|P\|_2 = p$$

$$\min_{\|\delta y\|_2 = 1} \delta y^T U^T H U \, \delta y = h$$

On aura :

$$\dot{V}(\underline{e}) \leqslant 2 (\varepsilon_\mu + \sigma_1 . \varepsilon_a) \, p \, b \, \|\underline{e}_2\|_2 - \|\underline{e}_2\|_2^2 \, \frac{h}{u}$$

$$\leqslant \|\underline{e}_2\|_2 . \left[2 (\varepsilon_\mu + \sigma_1 . \varepsilon_a) \, p . b - \|\underline{e}_2\|_2 . \frac{h}{u} \right] .$$

On désire avoir : $\dot{V}(\underline{e}) \leqslant 0$

Or :

$$\dot{V}(\underline{e}) \leq 0 \iff \|\underline{e}_2\|_2 \cdot \frac{h}{u} - 2(\varepsilon_\mu + \sigma_1 \cdot \varepsilon_a) p b \geq 0$$

$$\iff \|\underline{e}_2\|_2 \geq 2(\varepsilon_\mu + \sigma_1 \cdot \varepsilon_a) \frac{pbu}{h} .$$

On peut montrer (cf. [13]) que cette borne de $\|e_2\|_2$ est une limite ou valeur asymptotique supérieure.

$$\Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} \|\underline{e}_2\|_2 = 2(\varepsilon_\mu + \sigma_1 \cdot \varepsilon_a) \frac{pbu}{h}$$

D'autre part :

$$C \cdot \underline{e} = C\underline{e}_1 + C\underline{e}_2$$
$$= C\underline{e}_1 \qquad \text{car} \quad \underline{e}_2 \in K(C) .$$

Or :

$$C\underline{e} = \underline{\nu}_{n-s} - S^2 \cdot \Delta\underline{a}$$
$$\Rightarrow \|C\underline{e}\|_2 = \|C\underline{e}_1\|_2 = \|\underline{\nu}_{n-s} - S^2 \cdot \Delta\underline{a}\|_2$$
$$\leq \|\underline{\nu}_{n-s}\|_2 + \|S^2 \cdot \Delta\underline{a}\|_2$$
$$\leq \varepsilon_\nu + (\|S^{2T} \cdot S^2\|_2)^{1/2} \cdot \|\Delta\underline{a}\|_2$$
$$\Rightarrow \|C \cdot \underline{e}_1\|_2 \leq \varepsilon_\nu + \sigma_2 \cdot \varepsilon_a$$

Si on a posé :

$$\|S^{2T} \cdot S^2\|_2 = \sigma_2^2 .$$

Or : $\lambda_{min} \cdot \|\underline{e}_1\|_2 \leq \|C \cdot \underline{e}_1\|_2 \leq \lambda_{max} \cdot \|\underline{e}_1\|_2$

où λ_{min} et λ_{max} sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de $(C^T \cdot C)$.
On peut donc écrire :

$$\lambda_{min} \cdot \|\underline{e}_1\|_2 \leq \|C \cdot \underline{e}_1\|_2 \leq \varepsilon_\nu + \sigma_2 \cdot \varepsilon_a$$

Finalement :

$$\|\underline{e}_1\|_2 \leq \frac{\varepsilon_\nu + \sigma_2 \cdot \varepsilon_a}{\lambda_{min}}$$

ce qui achève de démontrer le théorème, en remarquant que dès que $\|e_1\|_2$ et $\|e_2\|_2$ ont atteint leur maximum, $\dot{V}(e)$ devient négatif, et donc l'erreur $\underline{e}$ ne peut plus augmenter.

V - PROGRAMME LYAPNOV - ETUDE DES MODELES SUR ORDINATEUR

V-1 GENERALITES ET FONDEMENTS THEORIQUES DU CODE LYAPNOV

Les théorèmes de LYAPOUNOV, et en particulier la condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique, vont nous permettre d'élaborer un moyen puissant de test des systèmes algébro-différentiels, sans avoir à les résoudre. En effet, si on a un modèle du type (2) :

$$\left.\begin{aligned} A_{s\times n}.X + B_{s\times n}.\dot{X} &= 0_s \\ C_{(n-s)\times n}.X &= 0_{n-s} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

alors une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique de ce modèle autour de son point d'équilibre 0_n est que l'équation matricielle - où $P_{s\times s}$ est une matrice symétrique inconnue, $H_{s\times s}$ une matrice s.d.p., et $U_{n\times s}$ une matrice de rang s et orthogonale à $C_{(n-s)\times n}$ - :

$$U^T_{s\times n}\left(A^T_{n\times s}\ P_{s\times s}\ B_{s\times n} + B^T_{n\times s}\ P_{s\times s}\ A_{s\times n}\right)U_{n\times s} = H_{s\times s} \qquad (E)$$

admette une solution $P_{s\times s}$ qui soit s.d.p.

On a de même examiné la propagation de l'erreur $\underline{e}$ dans le système (4):

$$\left.\begin{aligned} F_s(X,\dot{X},\underline{a}) &= 0_s \\ F_{n-s}(X,\underline{a}) &= 0_{n-s} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

On a vu que cette propagation était régie par le système variationnel (5) :

$$\left.\begin{aligned} A\,\underline{e} + B\,\dot{\underline{e}} &= \underline{\mu}_s(t) - S^1.\Delta\underline{a} \\ C\,\underline{e} &= \underline{\nu}_{n-s}(t) - S^2.\Delta\underline{a} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

où on a posé :

$$A = \frac{\partial F_s}{\partial X}\ ,\quad B = \frac{\partial F_s}{\partial \dot{X}}\ ,\quad S^1 = \frac{\partial F_s}{\partial \underline{a}}$$

$$C = \frac{\partial F_{n-s}}{\partial X}\ ,\quad S^2 = \frac{\partial F_{n-s}}{\partial \underline{a}}$$

avec : $\underline{e}$: vecteur erreur (ou écart) sur X

$\underline{a}$: vecteur erreur sur le vecteur paramètre $\underline{a}$

Une condition suffisante de stabilité de l'erreur dans (5) est que le système (6)

qui lui est associé :

$$\left.\begin{aligned} A\,\underline{e} + B\,\dot{\underline{e}} &= 0_s \\ C.\,\underline{e} &= 0_{n-s} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

soit lui-même asymptotiquement stable par rapport à $\underline{e}$ ($\Leftrightarrow \underline{e} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0_n$). Donc, en traitant le système (6) comme le système (2), on aura la même condition nécessaire et suffisante.

Par conséquent, étant donné un système de type (2) ou (5), si l'on veut étudier la stabilité de l'un ou la stabilité de l'erreur dans l'autre, il suffit de former l'équation matricielle (E) :

$$U^T\left(A^T P B + B^T P A\right) U = H \qquad (E)$$

dans les conditions précisées par le théorème IV-1.2.5. Cela signifie que l'on choisit une matrice H s.d.p. et une matrice U de rang s, telle que :

$$C_{(n-s)\times n} \cdot U_{n\times s} = 0_{(n-s)\times s} \quad .$$

On résout alors l'équation matricielle (E) en fonction de P qui doit être prise symétrique. Si la matrice P trouvée est s.d.p., alors le système (2) est asymptotiquement stable, et le système (5) stable par rapport à la propagation de l'erreur. Si P n'est pas s.d.p., le théorème IV-1.2.4. nous apprend alors que les systèmes (2) et (5) sont instables. Si l'équation (E) n'a pas de solution, on a vu que cela signifiait que les systèmes ne pouvaient pas être asymptotiquement stables. Donc le calcul de P nous fournira les renseignements désirés pour étudier la stabilité des systèmes (2) et (5). Ayant ainsi exposé les fondements théoriques du code LYAPNOV , on va maintenant l'examiner en détail, et tout d'abord les différentes étapes.

V-2. Les différentes étapes -

On suppose connues les différentes matrices Jacobiennes des systèmes (2) et (5), soit :

$$A_{s\times n}\ ,\ B_{s\times n}\ ,\ C_{(n-s)\times n}$$

On verra par la suite comment y accéder (cf. § V-7). On va alors commencer par tester la condition de bonne formulation des systèmes. On va donc fournir la matrice $D_{n\times n}$ formée par les sous-matrices $B_{s\times n}$ et $C_{(n-s)\times n}$ juxtaposées verticalement. Le système sera dit bien formulé si la matrice D est régulière, c'est-à-dire, si $\det(D) \neq 0$.

Si par contre, on a : $\det(D) = 0$,

alors tout traitement ultérieur serait vain et on émet alors un message d'erreur. Cependant pour permettre une plus grande compréhension de la structure des systèmes, et pour essayer de localiser les équations déficientes, on peut calculer les rangs des matrices A, B et C (cf. § V-3).

Si donc : $\det(D) \neq 0$, il faudra passer par les étapes suivantes :

1°) Vérifier que : $\det(D) \neq 0$

2°) Calculer une matrice $U_{n \times s}$ orthogonale à $C_{(n-s) \times n}$: $C.U = 0_{(n-s) \times n}$

3°) Calculer les coefficients de la matrice $P_{s \times s}$ (écrire les équations permettant de calculer P)

4°) Résoudre la matrice P

5°) Calculer ses valeurs propres

6°) En conclure sur la stabilité ou l'instabilité du modèle.

Pour le calcul de la matrice U, on pourra se reporter à l'analyse de l'algorithme DETØ (cf. § V-4) qui le traite en détail. Néanmoins, il y a lieu de noter tout de suite que la solution triviale $U_{n \times s} = 0_{n \times s}$ n'est jamais retenue, et qu'il y a en outre une infinité de solutions possibles. On n'en retiendra qu'une seule par l'algorithme de calcul : ce sera la plus simple et celle qui demandera le moins d'opérations à effectuer, tout en contenant une sous-matrice unité, et assurant ainsi un rang s à U. Quant au calcul des coefficients de la matrice P, il se fait à l'aide de l'algorithme RECH, qui sera traité au § V-5. Une fois terminé le calcul de ces coefficients et leur mémorisation dans la matrice COGA, on fait appel au programme ALGAU pour résoudre le système d'équations. Le résultat de la résolution se trouvera dans la colonne n° $(\frac{s(s+1)}{2} + 1)$. Cela fait, on remplit la matrice P avec les valeurs obtenues et on passe alors à la phase suivante qui est de calculer les valeurs propres de la matrice P, qui indiqueront par leurs signes si celle-ci est s.d.p. ou si elle ne l'est pas. Le calcul des valeurs propres se fera par l'algorithme AERUGI, bien adapté aux matrices symétriques. Cet algorithme se base sur deux méthodes dites de GIVENS et RUTISHAUSER exposées au § V-6. Nous voici arrivés à la fin du test. Si les valeurs propres trouvées sont toutes positives, alors on pourra affirmer que la matrice P est s.d.p. et que le modèle étudié est stable asymptotiquement, ou que l'erreur est stable. S'il existe une valeur propre nulle ou négative, le modèle sera instable.

V-3. Condition de bonne formulation -

On part donc des matrices $B_{s \times n}$ et $C_{(n-s) \times n}$. On construit alors une matrice carrée $D_{n \times n}$ de la façon suivante : On pose :

$$B_{s \times n} = (b_{ij}) \quad , i = 1, \ldots, s, \quad j = 1, \ldots, n$$
$$C_{(n-s) \times n} = (c_{ij}) \quad , i = 1, \ldots, n-s \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$
$$D_{n \times n} = (d_{ij}) \quad , i = 1, \ldots, n \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

On a alors :

$$d_{ij} = b_{ij} \quad \text{si} \quad i = 1, \ldots, s \quad \text{et} \quad \forall j = 1, \ldots, n$$
$$d_{ij} = c_{(i-s)j} \quad \text{si} \quad i = s+1, \ldots, n \quad \text{et} \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

Les s premières lignes de D seront les lignes de B et donc la matrice B, et les (n-s) dernières lignes de D seront les lignes de C, et donc la matrice C.

$$D = \left[\begin{array}{c} B \\ \hline C \end{array} \right]$$

On calcule alors le déterminant de cette matrice D par l'algorithme ALDET basé sur la méthode de GAUSS avec recherche de pivot maximum. Cette méthode étant très courante, on rappelle ci-après son principe très brièvement (cf. [10], [35], [5]). Les déterminants étant des formes multi-linéaires alternées, on ne change pas un déterminant en rajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes. Mais on change son signe si on permute deux lignes entre elles. Les mêmes remarques sont aussi valables en y remplaçant le mot ligne par colonne.

Par conséquent, étant donné un déterminant à calculer, on le transforme par une série d'opérations en un déterminant d'une matrice triangulaire. Le déterminant est égal au produit des termes diagonaux dans ce cas. Pour plus de détail se référer aux ouvrages d'analyse numérique cités en bibliographie. Une fois det(D) calculé, on vérifie qu'il n'est pas nul. Si tel est le cas, on passe à l'étape suivante, et donc au calcul de la matrice U. Au cas où on aurait det(D) = Ø, cela pouvait provenir comme on l'a vu (cf. § IV-1.2.1.) des trois causes suivantes :

1°) une ligne de B est combinaison linéaire d'autres lignes de B : on a donc une matrice $B_{s \times n}$ dont le rang est inférieur strictement à s. On a en même temps une matrice $C_{(n-s) \times n}$ de rang maximal égal à (n-s). Dans ce cas, les conséquences de cet état de B dépendent du rang de la matrice $A_{s \times n}$. Si le rang de la matrice $A_{s \times n}$ est s, le système est équivalent à un autre où l'on a remplacé une équation différentielle par une contrainte ou équation algébrique. Si le rang de $A_{s \times n}$ est inférieur à s, le système est sous-défini.

2°) une ligne de C est combinaison linéaire d'autres lignes de C : le rang de la matrice $C_{(n-s) \times n}$ est inférieur strictement à (n-s). Le système est équivalent donc à un autre où l'on a retiré une équation algébrique. Le système est donc sous-défini.

3°) rang $B_{s \times n} = s$, et rang $C_{(n-s) \times n} = n-s$

B et C sont de rang maximal, mais une ligne de C est combinaison linéaire de ligne de B. Alors suivant les cas, le système sera sous-défini si l'on a :

$$\text{rang } A_{s \times n} < s$$

et le système sera équivalent à un autre où l'on a remplacé une équation différentielle par une contrainte algébrique, et dans ce cas en changeant la forme du système, il deviendra bien formulé.

Dans tous les cas où l'on obtient :

$$\det(D) = 0 \quad ,$$

le traitement du système sera arrêté et un message d'erreur sera émis, pour dire que le système n'est pas bien formulé. On pourra alors demander un diagnostic plus précis, en demandant le calcul

des rangs des trois matrices $A_{s \times n}$, $B_{s \times n}$ et $C_{(n-s) \times n}$, ce qui permettra de rechercher l'erreur plus facilement.

V-4. Algorithme DETØ = calcul de $U_{n \times s}$ -

Le modèle étant donc bien formulé, on passe à l'étape suivante qui est le calcul de la matrice $U_{n \times s}$ orthogonale à $C_{(n-s) \times n}$.

Une première méthode de calcul consistait à utiliser un sous-programme mathématique nommé DLCIN qui permet de calculer la pseudo-inverse d'une matrice. Au cours du calcul de cette pseudo-inverse qui est définie par :

$A^{+}_{q \times p}$ pseudo inverse de $A_{p \times q}$ si l'on a :

$$A . A^{+} . A = A$$
$$A^{+} . A . A^{+} = A^{+}$$
$$\left(A . A^{+}\right)^{T} = A . A^{+}$$
$$\left(A^{+} . A\right)^{T} = A^{+} . A$$

on est amené à calculer une matrice U telle que :

$$A_{p \times q} \cdot U_{q \times (q-r)} = 0_{p \times (q-r)}$$,où r est le rang de A.

Cette matrice $U_{q \times (q-r)}$ aurait répondu exactement à nos besoins. Malheureusement, des conditions techniques ont rendu l'utilisation de DLCIN à cet effet impossible, du moins pour le moment. On a alors retenu une autre méthode, dont on exposera d'abord le principe général, et ensuite les détails précis du calcul.

V-4.1. Principe général -

On veut trouver une matrice $U_{n \times s}$ orthogonale à $C_{(n-s) \times n}$ où $C_{(n-s) \times s}$ est de rang (n-s) :

$$C_{(n-s) \times n} \cdot U_{n \times s} = 0_{(n-s) \times n}$$

On veut en outre que $U_{n \times s}$ soit de rang maximal :

$$rg\left(U_{n \times s}\right) = s$$

$U_{n \times s}$ étant une matrice à n colonnes et s lignes, elle contient n.s termes, donc n.s inconnues à déterminer. En fait, en effectuant le produit $C_{(n-s) \times n} \cdot U_{n \times s}$, on aboutit à s systèmes différents et indépendants, chacun contenant (n-s) équations à n inconnues. Or un système de (n-s) équations ne peut déterminer, dans le meilleur des cas, que (n-s) inconnues de façon unique. Comme l'on a ici n inconnues à déterminer, il faut donc fixer, c'est-à-dire choisir arbitrairement la valeur de : n-(n-s) = s, soit s inconnues parmi les n. Les (n-s) inconnues restantes pourront être déterminées par la résolution algébrique du système cramérien correspondant.

D'autre part,on désire que $U_{n\,x\,s}$ soit de rang maximal s. Pour cela, il suffira de fixer une matrice unité $I_{s\,x\,s}$ dans $U_{n\,x\,s}$. Mais le problème se posera alors au niveau du choix des lignes de $U_{n\,x\,s}$ qui représenteront les lignes de la matrice unité $I_{s\,x\,s}$. Il faut donc choisir ces lignes de telle façon que les lignes non choisies puissent former un système de CRAMER, à déterminant non nul : ce système de CRAMER est obtenu en effectuant le produit $C_{(n-s)\,x\,n} \cdot U_{n\,x\,s}$, en laissant à gauche du signe égal les inconnues restant à déterminer, et en mettant à droite du signe égal celles qu'on a fixées précédemment par le choix de la sous-matrice unité $I_{s\,x\,s}$. On procèdera donc à la recherche dans $C_{(n-s)\,x\,n}$ d'une sous-matrice carrée d'ordre s à déterminant non nul, à l'aide de l'algorithme DETØ, et plus précisément de la première partie de DETØ, qui porte elle-même le même nom DETØ. Une fois ce déterminant non nul trouvé et la sous-matrice correspondante localisée par la mémorisation dans le tableau MX du numéro de ses colonnes dans celles de $C_{(n-s)\,x\,n}$, on va pouvoir remplir la matrice U par la deuxième partie de l'algorithme DETØ, appelée ALORS. L'algorithme ALORS va rechercher les numéros ne figurant pas dans MX, et affecter aux lignes de $U_{n\,x\,s}$ portant ces mêmes numéros les lignes consécutives de la matrice unité $I_{s\,x\,s}$.

Le second membre pour chacun des systèmes sera constitué par les colonnes de C, changées de signe, dont les numéros ne figurent pas dans MX. Ce sont donc les colonnes qui ne vont pas servir au calcul du déterminant non nul. On aura pris soin de mettre dans la matrice auxiliaire CU les colonnes de C devant servir pour le calcul du déterminant des s systèmes à résoudre, donc les colonnes dont les numéros figurent dans MX. On a posé :

PRE = variable indiquant (si PRE = 1) par sa valeur que, à la fin de l'examen des différentes colonnes, il n'y a pas un nombre minimal de colonnes de $C_{(n-s)\,x\,n}$ non identiquement nulles.

K = compteur des colonnes dans CU, matrice auxiliaire .

CU = matrice auxiliaire, destinée à contenir les colonnes de C à déterminant non nul.

MX = tableau destiné à contenir les numéros des colonnes mémorisées dans CU, c'est-à-dire celles dont on calcule le déterminant à un moment donné .

T = variable permettant de modifier le choix des colonnes de CU, quand le déterminant calculé est nul.

V-4.2. Sous-algorithme DETØ -

On pourra se reporter au paragraphe suivant (§ V-4.3) pour l'organigramme de DETØ. On prend donc les colonnes de $C_{(n-s)\,x\,n}$ l'une après l'autre en commençant par la colonne n° 1, puis n° 2, etc... On recherche dans ces colonnes des éléments non nuls. Dès que l'on a trouvé un élément non nul dans la colonne n° j, on mémorise cette colonne dans CU, et on note son numéro dans MX. C'est le compteur K qui indiquera par sa valeur les colonnes de CU et de MX où il faudra recopier la colonne de $C_{(n-s)\,x\,n}$ ainsi trouvée, de même que son numéro. On passe alors à la colonne n°(j+1), et on la teste de la même manière. L'objectif est de trouver (n-s) colonnes ayant chacune au moins un élément non nul. Si, après avoir testé toutes les colonnes de $C_{(n-s)\,x\,n}$, on n'arrive pas à trouver (n-s) colonnes non identiquement nulles, alors l'indicateur PRE reste à la valeur 1, et indiquera ainsi le fait observé. Cela est en pratique une sécurité supplémentaire : car si l'on ne peut trouver (n-s) colonnes de $C_{(n-s)\,x\,n}$ non identiquement nulles, cela impliquerait automatiquement que C n'est pas de rang maximal (n-s), et par conséquent : det(D) = 0, et le sytème

serait alors mal formulé. En tous cas, cela entraîne un arrêt du traitement et une indication, sous forme de message d'erreur : "Il y a trop de colonnes nulles".

Si par contre, on arrive à remplir CU, on calcule alors son déterminant. Si celui-ci est non nul, alors on a pu trouver une sous-matrice de C pouvant servir de système de CRAMER. Si ce déterminant est nul, il faut poursuivre la recherche. On remplace alors la dernière colonne de CU, donc la dernière colonne testée dans C, et dont le numéro figure dans MX(N-S) - c'est la colonne de MX de numéro N-S - par une autre colonne de C de numéro supérieur, et qui soit non identiquement nulle. Si on n'en trouve pas, il faut changer la combinaison des colonnes précédentes retenues. Si on en trouve, on recalcule le nouveau déterminant. La recherche est alors terminée, si celui-ci est non nul. S'il est nul, par contre, il faudra rechercher d'autres colonnes et leur faire subir le même traitement. On poursuivra ainsi jusqu'à :

- soit trouver (n-s) colonnes non nulles et à déterminant non nul ,
- soit constater que les (n-s-1) premières colonnes retenues ne sont pas indépendantes.

On se débarasse alors de la $(n-s-1)^{ème}$ colonne et on la remplace par la première colonne qui la suit (de numéro supérieur) et qui soit non nulle (identiquement). Puis on recherche une colonne complémentaire, donc une $(n-s)^{ème}$ colonne non nulle. Alors on effectue le test du déterminant. On répète ainsi ces opérations jusqu'à trouver une sous-matrice à déterminant non nul. Si par contre, après avoir testé toutes les combinaisons possibles de sous-matrices à (n-s) colonnes prises dans C, aucune d'entre elles n'admet un déterminant non nul, on arrête alors le traitement, et on déclare que le système n'est pas cramérien et que l'une des équations algébriques est fonction des autres. En fait ce cas n'arrivera pas en pratique, car il impliquerait que C n'est pas de rang maximal, et par conséquent :

$$\det(D) = \det\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = 0$$

Cela signifie que le système est mal formulé. Comme on a déjà vérifié que le système était bien formulé avant de passer à l'étape actuelle, ce cas ne devrait donc jamais se produire à ce stade des opérations.

Par conséquent, quand on a réussi à trouver une sous-matrice de $C_{(n-s) \times n}$ à déterminant non nul, on exécute alors la deuxième partie de l'algorithme DETØ, qui est l'algorithme ALORS. Mais avant de l'exposer, on va donner ci-après l'organigramme de DETØ.

V-4.3. Organigramme du sous-algorithme DETØ -

Voir page suivante.

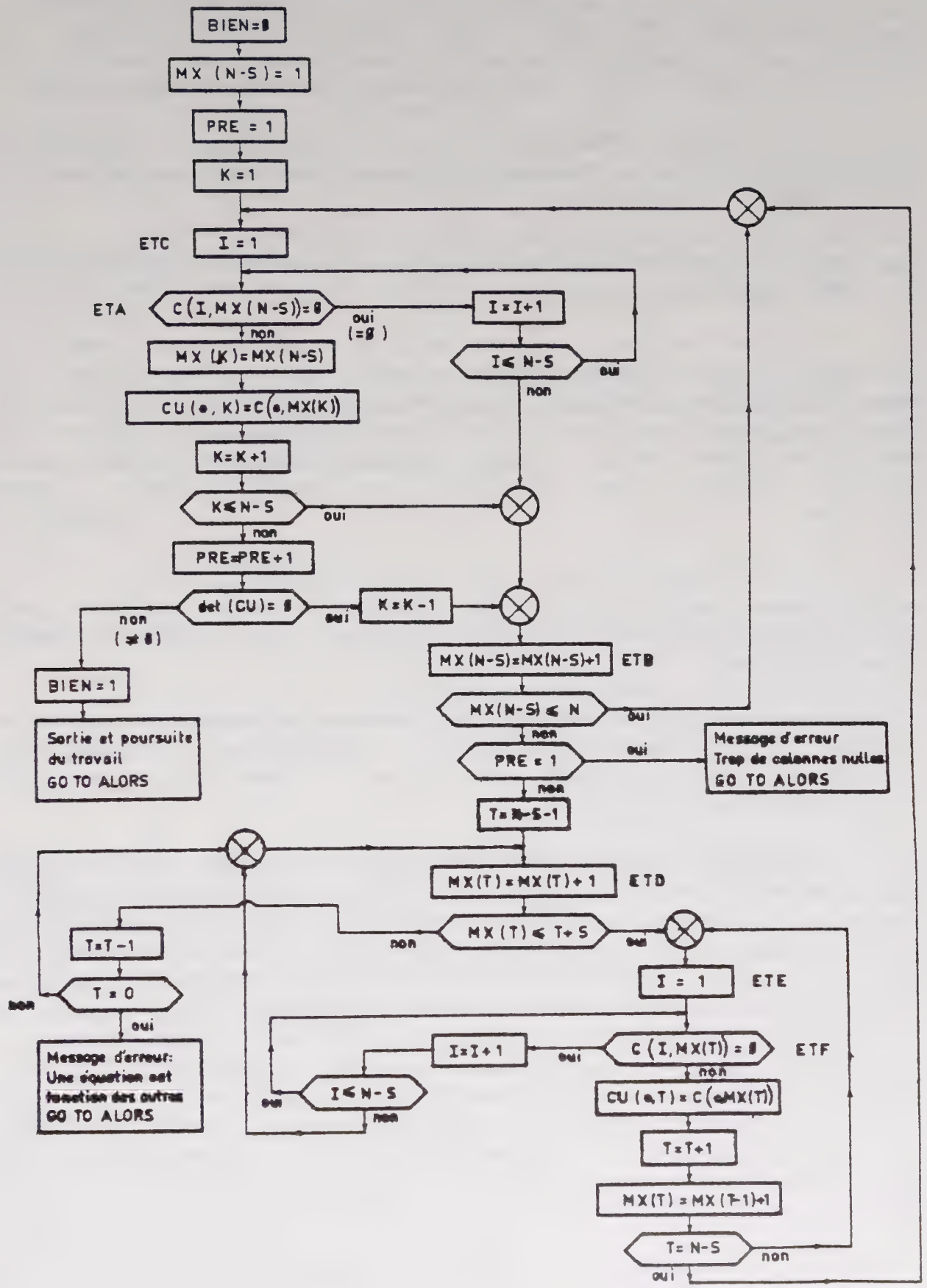
V-4.4. Sous-algorithme ALORS -

On commencera par l'étude du sous-algorithme et au paragraphe suivant (§ V-4.5) on pourra trouver son organigramme détaillé.

On utilisera en particulier les variables suivantes :

BIEN = indicateur signifiant, quand il est nul, que le système n'est pas cramérien

Recherche d'un déterminant non nul dans C = DETB



ou qu'il l'est, si sa valeur est 1.

BIEN = $\emptyset \Leftrightarrow$ système non cramérien .

BIEN = $1 \Leftrightarrow$ système cramérien .

SM = Matrice contenant les seconds membres relatifs aux s systèmes d'équations à résoudre .

J = variable indice du tableau MX .

K = variable indice servant à repérer la colonne de U correspondant à la colonne de même numéro de la sous-matrice unité $I_{s \times s}$.

I = variable indice servant à trouver les lignes de U correspondant aux lignes de la matrice unité $I_{s \times s}$.

On a donc trouvé dans $C_{(n-s) \times n}$ une sous-matrice à déterminant non nul. Reste à calculer alors la matrice U. On commence d'abord par mettre à zéro la matrice des seconds membres SM, et la matrice recherchée $U_{n \times s}$. On ne modifiera, par la suite, dans $U_{n \times s}$ que les éléments devant prendre d'autres valeurs que zéro. Le problème consiste donc à trouver les coefficients des systèmes à résoudre, à localiser les inconnues et à trouver les seconds membres correspondant à chacun des systèmes. Il est à noter que les s systèmes à résoudre et qui s'écrivent sous la forme :

$$A'X = B' \quad ,$$

sont tels que la matrice des coefficients A' est identique pour tous les systèmes, alors que la matrice du second membre, B', varie d'un système à l'autre.

Les calculs faits montrent que le second membre relatif au système des inconnues de la colonne n° K de U sera donné par la colonne n° I de C, changée de signe. Ce I correspond en fait à la Kème colonne de C, si on compte dans C uniquement les colonnes qui n'ont pas participé au calcul de déterminant.

Le remplissage de U et de SM se fait donc de la façon suivante : un premier compteur I va balayer au fur et à mesure les colonnes de C, et par conséquent les lignes de U. On se rappelle que le tableau MX a mémorisé les numéros des colonnes de C devant servir pour le calcul du déterminant. On initialise donc I à 1 et l'incrémentera par la suite de 1, un certain nombre de fois. On compare alors la valeur de I à MX(1). S'il y a égalité, c'est que la valeur de I correspond à un numéro de colonne retenue pour le calcul du déterminant du système. On n'en tient pas compte, et on incrémente I de 1. Si I $<$ MX(1), c'est que la valeur de I n'a pas été retenue, et alors la ligne de U de numéro I sera une ligne de la sous-matrice unité $I_{s \times s}$ contenue dans U. C'est le compteur K qui indiquera la colonne où l'on inscrira le 1, car il y a un seul 1 par ligne dans la matrice $I_{s \times s}$. Ce compteur K est lui-même initialisé à 1 et incrémenté de 1 à chaque fois qu'on a inscrit 1 dans une ligne de U. Puis on incrémente I et on répète le traitement. Plus généralement, on aura à comparer, à un moment donné, I à MX(J) où : J $\in$ [1,N-S]. Alors les trois cas suivants sont possibles :

1°) MX(J) = I : cela signifie que I correspond à une colonne retenue pour le calcul du déterminant et doit donc être négligé. On incrémentera I de 1 et on fera de nouveau

la comparaison

2°) MX(J) > I : cela signifie que I correspond à une colonne non retenue pour le calcul du déterminant. On mettra alors un seul 1 dans la ligne n° I de U, à l'endroit où elle coupe la colonne dont le numéro est donné par le compteur K.Ce compteur est incrémenté de 1 à la suite de cette opération.

3°) MX(J) < $\mathring{I}$: cela signifie que, après un test précédent où on a eu l'égalité (MX(J)=I), I a été incrémenté, mais J ne l'a pas été. On incrémente alors J et on refait la comparaison.

On poursuit ces opérations de la sorte jusqu'à remplissage des s lignes de la sous-matrice unité $I_{s \times s}$ contenue dans U. Cela arrivera quand K prendra la valeur (s+1), après remplissage de la dernière ligne de cette sous-matrice. On aura également, en même temps, rempli la matrice des seconds membres SM.

Une fois SM et s des n lignes de U remplies de la façon ci-dessus exposée, on fait appel à l'algorithme mathématique ALGAU qui résoudra le système. L'algorithme ALORS se termine par le remplissage des inconnues qui restaient à déterminer dans U, par les valeurs trouvées lors de la résolution des systèmes par l'algorithme ALGAU.

Remarque :

Il est à noter que le traitement ci-dessus ne donne qu'une solution possible pour U, parmi tant d'autres (il y en a en fait une infinité, et cette infinité est elle-même multidimensionnelle).

L'algorithme ALGAU a été choisi pour ses diverses qualités. Il se base sur l'algorithme de GAUSS avec recherche de pivot maximum. Il prévoit l'éventualité de plusieurs seconds membres pour une même matrice des coefficients

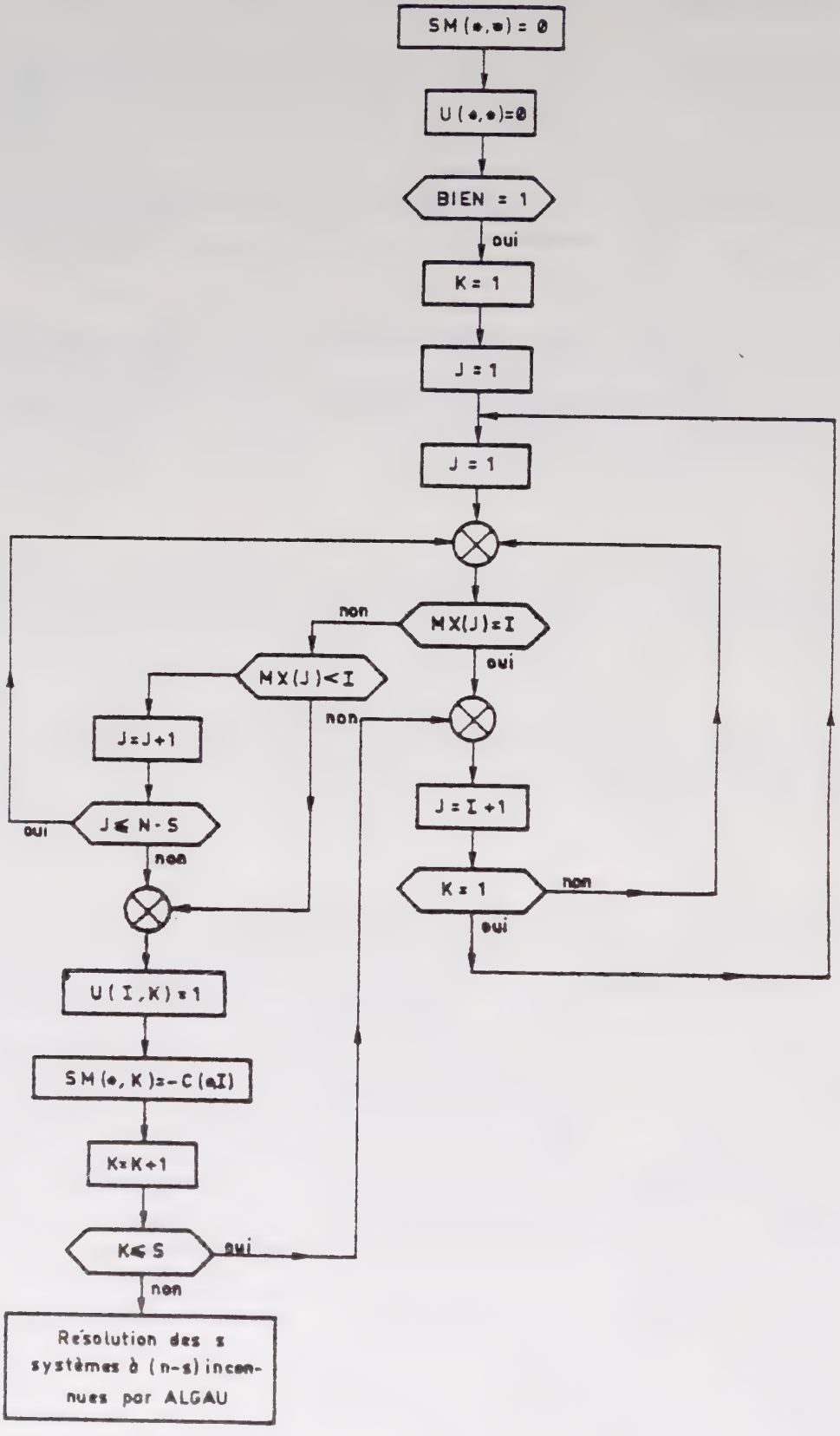
$$A'.X \ ,$$

ce qui est le cas ici. De plus, il s'adapte bien à des matrices A'quelconques,alors que d'autres algorithmes, ALTRI ou ALBAN par exemple, seraient plus adaptés à des matrices spéciales, creuse ou tridiagonale ou bande. Si tel était le cas à l'avenir, on pourrait prévoir le remplacement de l'instruction d'appel de ALGAU par l'instruction d'appel d'un autre algorithme plus approprié. L'algorithme de GAUSS avec recherche de pivot maximum est de plus une méthode très rapide, bon marché, et probablement une des plus employées. Ici, elle est particulièrement appropriée, car on a s systèmes à résoudre, de même matrice A'. La méthode de GAUSS transforme A' en une matrice triangulaire, et par conséquent, on la transforme une fois pour toutes. Les s systèmes auront leurs solutions, en transformant de façon appropriée le vecteur du second membre. Il y a donc une économie considérable. Ces divers facteurs favorables ont été déterminants pour le choix de l'algorithme ALGAU.

On traitera au paragraphe V-4.6. un exemple simple décrivant en détail le fonctionnement de l'algorithme DETØ.

V-4.5. Organigramme du sous-algorithme ALORS -

V.4.5. Organigramme du sous-algorithme ALORS



V-4.6. Exemple illustrant l'algorithme DETØ -

Soit la matrice C(N-S,N) où N = 4 et S = 2 .

$$\Rightarrow \quad N-S = 2$$

$$\Rightarrow \quad C_{2x4} = C(2,4)$$

$$\Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

On doit donc calculer : $U_{nxs} = U_{4x2}$

$$U(N,S) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}$$

1°) Il faut d'abord trouver dans $C_{2\,x4}$ une sous-matrice s x s, donc à deux lignes et deux colonnes qui soit régulière, donc à déterminant non nul. On prend d'abord la première colonne de C. Elle a déjà son premier élément non nul. On retient donc la première colonne et on la mémorise dans CU. On mémorise également dans MX le numéro 1 qui correspond à la première colonne de C. Puis on teste la deuxième colonne. Comme tous ses éléments sont nuls, on la néglige et on passe à la troisième colonne. Ayant son premier élément non nul, on la retient, la retranscrit dans la deuxième colonne de CU et on mémorise le nombre 3 dans MX qui correspond à la troisième colonne de C qui vient d'être retenue. On calcule alors le déterminant de CU :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Comme il est nul, on continue alors les investigations, en prenant la colonne qui suit celle que nous avions pris en dernier, donc la quatrième colonne. Son deuxième élément étant non nul, on la retient. On la transcrit dans CU à la place de la troisième colonne, et, on mémorise le numéro 4 dans MX à la place de 3. On calcule le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

Le déterminant étant non nul, les colonnes 1 et 4 vont constituer les coefficients du système de CRAMER. Donc :

$$CU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad MX = (1 \quad 4) .$$

2°) A présent, il faut localiser dans U une sous-matrice unité à deux lignes et deux colonnes, pour s'assurer d'une sous-matrice de rang s donc 2 dans U. Cela va se faire à l'aide de MX. En effet multiplions C par U, il vient :

$$C_{2\times4} \cdot U_{4\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + c_1 & a_2 + c_2 \\ 2a_1 + 2c_1 + 6d_1 & 2a_2 + 2c_2 + 6d_2 \end{pmatrix}$$

Or : $C_{2\times4} \cdot U_{4\times2} = O_{2\times2}$

On a donc les 2 systèmes d'équations :

$$\begin{cases} a_1 + c_1 = 0 \\ 2a_1 + 2c_1 + 6d_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_2 + c_2 = 0 \\ 2a_2 + 2c_2 + 6d_2 = 0 \end{cases}$$

Chaque système contient deux équations à 3 inconnues. Il faut donc fixer arbitrairement dans chacun d'entre eux une inconnue parmi les trois, pour les ramener à des systèmes de deux équations à deux inconnues. Si on prenait n'importe quels éléments pour les fixer, on pourrait tomber sur un système non cramérien. Par exemple, si on fixait d_1 et d_2, on aurait le système à deux inconnues a_1 et C_1 :

$$a_1 + c_1 = 0$$
$$2a_1 + 2c_1 = -6d_1$$

Ce système n'est pas soluble, à part la solution triviale :

$$a_1 = c_1 = d_1 = 0$$

On aurait la même chose dans le deuxième système. On voit donc qu'il est impératif de choisir judicieusement les inconnues que l'on fixera, pour trouver une solution acceptable. Donc ici on pourra fixer arbitrairement c_1 et c_2, mais aussi b_1 et b_2 puisque leurs coefficients sont nuls. Il vient donc :

$$\begin{cases} a_1 = -c_1 \\ 2a_1 + 6d_1 = -2 \cdot c_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_2 = -c_2 \\ 2a_2 + 6d_2 = -2 \cdot c_2 \end{cases}$$

Or a_1, a_2, d_1 et d_2 appartiennent aux lignes de $U_{4\times2}$ de numéros 1 et 4, et qui sont donc de mêmes numéros que les colonnes retenues dans $C_{2\times4}$ pour former un système cramérien, numéros qui sont eux-mêmes mémorisés dans MX. Donc, quand on a trouvé une sous-matrice de $C_{2\times4}$ à déterminant non nul, et qu'on a mémorisé dans MX les numéros des colonnes correspondantes de $C_{2\times4}$, on sait que ces numéros correspondront aussi aux numéros des lignes de $U_{4\times2}$ qu'il ne faudra pas fixer arbitrairement. On fixera donc les inconnues se trouvant dans les lignes de $U_{4\times2}$ dont les numéros ne figurent pas dans MX. Dans cet exemple, on fixera par conséquent les lignes de $U_{4\times2}$ de numéros 2 et 3 puisque :

$$MX = (1, 4)$$

Donc la deuxième ligne de $U_{4\times2}$ sera la première ligne de la sous-matrice unité $I_{2\times2}$, et la troisième ligne de U la deuxième ligne de $I_{2\times2}$. D'où :

$$U_{4\times 2} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \quad , \quad b_1 = c_2 = 1 \quad \text{et} \quad b_2 = c_1 = 0 \; .$$

3°) Pour finir le traitement, il faut encore calculer les valeurs des inconnues restant à déterminer, soit: a_1, a_2, d_1 et d_2. Les systèmes ci-dessus deviennent donc :

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -0 \\ 2a_1 + 6d_1 &= -0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ 2a_1 + 6d_1 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Le second membre est ici : $\begin{pmatrix} -c_1 \\ -2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

De même, le second système nous donne :

$$\begin{aligned} a_2 &= -1 \\ 2a_2 + 6d_2 &= -2 \end{aligned}$$

Le second membre s'écrit : $\begin{pmatrix} -c_2 \\ -2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

On voit bien que le second membre du premier système est la première colonne de $C_{2\times 4}$ non retenue pour le calcul du déterminant, soit la deuxième colonne de $C_{2\times 4}$, dont on aura ensuite changé le signe. De même le second membre du second système est la deuxième colonne de $C_{2\times 4}$ non retenue pour le calcul du déterminant, soit la troisième colonne de $C_{2\times 4}$ changée de signe.

Enfin la matrice des coefficients des inconnues est identique pour les deux systèmes et est donnée par la matrice CU directement.

La solution finale est donc :

$$U_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; .$$

V-5. ALGORITHME RECH -

V-5.1. Principe théorique -

Ayant obtenu la matrice $U_{n\times s}$, on passe alors à l'étape suivante qui consiste à calculer la matrice $P_{s\times s}$. Ce calcul se fera en deux étapes. On commencera par chercher le système linéaire de la forme :

$$A'X = B'$$

que devront satisfaire les éléments de $P_{s\times s}$, représentés par le vecteur X dans cette égalité.

A' est la matrice des coefficients et B' celle du second membre. La première étape aura comme objectif de calculer la matrice des coefficients A', et celle du second membre B'. La deuxième étape devra résoudre ce système linéaire pour trouver X, donc P. Ce paragraphe décrit uniquement la méthode de calcul de la matrice des coefficients A', et celle du second membre B'.

Les théorèmes IV-1.2.5. montre que $P_{s\,x\,s}$ est la solution de l'équation matricielle (E) :

$$U^{T}_{s\times n}\left(A^{T}_{n\times s}.P_{s\times s}.B_{s\times n}+B^{T}_{n\times s}.P_{s\times s}.A_{s\times n}\right)U_{n\times s}=H_{s\times s}\quad .$$

Les matrices A et B sont les matrices du système à étudier. La matrice $U_{s\,x\,s}$ doit être orthogonale à une autre matrice du système $C_{(n-s)\,x\,n}$. On a déjà vu (cf. § V-4)comment la calculer. Reste donc à trouver la matrice $H_{s\,x\,s}$. La seule condition qu'on lui impose est d'être s.d.p. Comme toute matrice M de $\mathcal{M}(n\,;\,\mathbb{R})$ est telle que :

$$M^{T}.M \quad \text{s.d.p.} \quad \text{si} \quad \det(M)\neq 0$$

et que toute matrice rectangulaire $N_{p\,x\,q}$ de rang maximal est telle que :

$$N^{T}_{q\times p}.N_{p\times q} \qquad \text{est aussi s.d.p.,}$$

on voit que le choix de $H_{s\,x\,s}$ ne pose que "l'embarras du choix". On aurait pu choisir pour $H_{s\,x\,s}$ la matrice :

$$U^{T}_{s\times n}.U_{n\times s} \quad ,$$

car $U_{n\,x\,s}$ est de rang maximal égal à s. Mais cela entraînerait des calculs supplémentaires dont on peut se passer, si on choisit pour $H_{s\,x\,s}$ la matrice unité $I_{s\,x\,s}$. Les autres choix : prendre une matrice carrée régulière et faire le produit :

$$M^{T}.M \quad ,$$

ou une matrice rectangulaire $N_{p\,x\,q}$ de rang maximal et faire le produit :

$$N^{T}.N \quad ,$$

exigeraient qu'on vérifie le régularité et le rang maximum de M et de N. Par conséquent, les choix possibles se limitent aux choix les plus simples et les moins coûteux : donc prendre pour $H_{s\,x\,s}$ la matrice $I_{s\,x\,s}$ ou la matrice $U^{T}.U$. Le choix de $U^{T}.U$ aura des répercussions sur le principe de calcul, car l'équation matricielle (E) donne :

$$U^{T}_{s\times n}\left(A^{T}_{n\times s}.P_{s\times s}.B_{s\times n}+B^{T}_{n\times s}.P_{s\times s}.A_{s\times n}\right).U_{n\times s}=H_{s\times s}$$
$$=U^{T}.U$$
$$=U^{T}_{s\times n}.I_{n\times n}.U_{n\times s}\quad .$$

Une solution serait alors de prendre :

$$A^{T}_{n\times s}.P_{s\times s}.B_{s\times n}+B^{T}_{n\times s}.P_{s\times s}.A_{s\times n}=I_{n\times n}\qquad (E')\quad .$$

On aura alors, comme on le verra par la suite un nombre d'inconnues égal à :

$$\frac{s\,(s+1)}{2}$$

Ce nombre d'inconnues correspond aux nombres d'éléments distincts de la matrice symétrique $P_{s\,x\,s}$. Avec l'équation (E') on aura $\frac{n(n+1)}{2}$ équations à $\frac{s(s+1)}{2}$ inconnues. On aura un système sur-défini qui peut poser des problèmes, et a de bonnes chances de comporter des équations incompatibles, ne serait-ce qu'à cause des erreurs de calcul de la matrice des coefficients. C'est pourquoi on a choisi de prendre :

$$H_{s\times s} = I_{s\times s}$$

Soient alors :

$$A_{s\times n} = (a_{ij}) \iff A^{T}_{n\times s} = (a_{ji})$$
$$B_{s\times n} = (b_{pq}) \iff B^{T}_{n\times s} = (b_{qp})$$
$$P_{s\times s} = (p_{kl}) \;/\; P^{T} = P$$
$$\iff p_{kl} = p_{lk}$$

Effectuons le produit : $A^{T}_{n\times s} \cdot P_{s\times s} \cdot B_{s\times n}$.

$$\Longrightarrow \quad A^{T}_{n\times s} \cdot P_{s\times s} \cdot B_{s\times n} = (\alpha_{ef}) \;,\; e,f = 1,\dots,n$$

$$A^{T}.P.B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{s1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1s} \\ \vdots & & \\ p_{s1} & \cdots & p_{ss} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$A^{T}.P.B = (\alpha_{ef})_{\substack{e=1,\dots,n \\ f=1,\dots,n}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{s} a_{j1}\cdot p_{jk}\right).b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{s} a_{j1}\cdot p_{jk}\right).b_{kn} \\ & & \\ \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{s} a_{jn}\cdot p_{jk}\right).b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{s} a_{jn}\cdot p_{jk}\right).b_{kn} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\alpha_{ef} = \sum_{j,k=1}^{s} a_{je}\cdot b_{kf}\cdot p_{jk}$$

Soit :

$$M_{n\times n} = A^T P B + B^T P A = (\beta_{ef}) \quad , \quad e,f = 1,\dots,n .$$

On a alors :

$$\beta_{ef} = \alpha_{ef} + \alpha_{fe} \quad ,$$

car $M_{n\times n}$ est symétrique quand P l'est. En effet :

$$\begin{aligned} M^T_{n\times n} &= (A^T P B + B^T P A)^T \\ &= B^T P A + A^T P B \\ &= M_{n\times n} \end{aligned}$$

Donc : $M^T = M \iff M$ symétrique.

Si on a : $e \neq f$, alors :

$$\beta_{ef} = \alpha_{ef} + \alpha_{fe} = \sum_{j,k=1}^{s} a_{je}\cdot b_{kf}\cdot p_{jk} + \sum_{j,k=1}^{s} a_{jf}\cdot b_{ke}\cdot p_{jk}$$

$$= \sum_{j,k=1}^{s} (a_{je}\cdot b_{kf} + a_{jf}\cdot b_{ke})\cdot p_{jk}$$

ce qui donne pour e, f compris entre 1 et n, avec : $e \neq f$:

$$\beta_{ef} = \sum_{\substack{j<k \\ 2\leq k\leq s}} (a_{je}\cdot b_{kf} + a_{ke}\cdot b_{jf} + a_{jf}\cdot b_{ke} + a_{kf}\cdot b_{je})\cdot p_{jk} + \sum_{k=1}^{s} (a_{ke}\cdot b_{kf} + a_{kf}\cdot b_{ke})\cdot p_{kk}$$

Si on prend par ailleurs : $f = e$, alors :

$$\beta_{ee} = 2\alpha_{ee} = \sum_{j,k=1}^{s} 2\, a_{je}\cdot b_{ke}\cdot p_{jk}$$

$$\Rightarrow \beta_{ee} = \sum_{k=1}^{s} 2\, a_{ke}\cdot b_{ke}\cdot p_{kk} + 2\cdot \sum_{\substack{j<k \\ 2\leq k\leq s}} (a_{je}\cdot b_{ke} + a_{ke}\cdot b_{je})\cdot p_{jk}$$

Soit par ailleurs : $U_{n\times s} = (u_{ij})$

On a donc :

$$U_{n\times s} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{ns} \end{pmatrix} \iff U^T_{s\times n} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{1s} & \cdots & u_{ns} \end{pmatrix}$$

On a alors : $U^T (A^T P B + B^T P A) U = U^T M U$.

$$U^T M U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{1s} & \cdots & u_{ns} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1s} \\ & & \\ u_{n1} & \cdots & u_{ns} \end{pmatrix}$$

Si on pose :

$$U^T M U = N$$

On a alors : $N_{s\times s} = (\gamma_{cd})$.

$$N_{s\times s} = \begin{bmatrix} \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{n} u_{q1} \cdot \beta_{qr} \right) \cdot u_{r1} & \cdots & \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{n} u_{q1} \cdot \beta_{qr} \right) \cdot u_{rs} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{n} u_{qs} \cdot \beta_{qr} \right) \cdot u_{r1} & \cdots & \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{n} u_{qs} \cdot \beta_{qr} \right) \cdot u_{rs} \end{bmatrix}$$

On aura alors les deux cas :

1°) <u>c = d</u>, et c = 1, ..., s :

$$\gamma_{cc} = \sum_{k=1}^{s} \Big[\sum_{r=1}^{n} 2\, u_{rc}^2 \cdot a_{kr} \cdot b_{kr} + \sum_{\substack{q<r \\ 2\le r\le n}} 2 \cdot u_{qc} \cdot u_{rc} \left(a_{kq} \cdot b_{kr} + a_{kr} \cdot b_{kq} \right) \Big] p_{kk}$$
$$+ \sum_{\substack{j<k \\ 2\le k\le s}} \Big[\sum_{r=1}^{n} 2 \left(a_{jr} \cdot b_{kr} + a_{kr} \cdot b_{jr} \right) \cdot u_{rc}^2$$
$$+ \sum_{\substack{q<r \\ 2\le r\le n}} 2\, u_{qc} \cdot u_{rc} \left(a_{jq} \cdot b_{kr} + a_{kq} \cdot b_{jr} + a_{jr} b_{kq} + a_{kr} b_{jq} \right) \Big] p_{jk}$$

2°) <u>c ≠ d</u>, et c,d = 1, ..., s

$$\gamma_{cd} = \sum_{k=1}^{s} \Big[\sum_{r=1}^{n} 2\, u_{rc} \cdot u_{rd} \cdot a_{kr} \cdot b_{kr} + \sum_{\substack{q<r \\ 2\le r\le n}} \left(u_{qc} \cdot u_{rd} + u_{rc} \cdot u_{qd} \right) \cdot$$
$$\left(a_{kq} \cdot b_{kr} + a_{kr} \cdot b_{kq} \right) \Big] p_{kk} + \sum_{\substack{j<k \\ 2\le k\le s}} \Big[\sum_{r=1}^{n} 2 \left(a_{jr} \cdot b_{kr} + a_{kr} \cdot b_{jr} \right) u_{rc} \cdot u_{rd}$$
$$+ \sum_{\substack{q<r \\ 2\le r\le n}} \left(u_{qc} \cdot u_{rd} + u_{rc} \cdot u_{qd} \right) \cdot \left(a_{jq} \cdot b_{kr} + a_{kq} \cdot b_{jr} + a_{jr} \cdot b_{kq} + a_{kr} \cdot b_{jq} \right) \Big] p_{jk}$$

On écrit ensuite que l'équation(E) est vérifiée, soit :

$$U^T \left(A^T P B + B^T P A \right) U = H$$

Comme les deux membres sont des matrices symétriques, il suffit de calculer les éléments de la diagonale principale et ceux qui lui sont supérieurs. On écrit ainsi l'égalité des éléments des matrices des deux membres de (E), pour les éléments qui sont situés sur la diagonale principale et au-dessus. On arrive donc au système suivant : (Γ)

$$
\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \lambda''_{11}\cdot p_{11} + \lambda''_{22}\cdot p_{22} + \dots + \lambda''_{ss}\cdot p_{ss} + \lambda''_{12}p_{12} + \lambda''_{13}\cdot p_{13} + \lambda''_{23}p_{23} + \dots + \lambda''_{1s}\cdot p_{1s} + \dots + \lambda''_{(s-1)s}\,p_{(s-1)s} &&= 1\\
\gamma_{22} &= \lambda''_{11}p_{11} + \dots && \dots = 1\\
&\vdots\\
\gamma_{ss} &= \lambda''_{11}p_{11} + \dots && \dots + \lambda''_{(s-1)s}\cdot p_{(s-1)s} = 1\\
\gamma_{12} &= \lambda''_{11}p_{11} + \dots && \dots + \lambda''_{(s-1)s}\cdot p_{(s-1)s} = 0\\
\gamma_{13} &= \lambda''_{11}p_{11} + \dots && = 0\\
\gamma_{23} &= \lambda''_{11}p_{11} + \dots && = 0\\
&\vdots\\
\gamma_{1s} &= \lambda''_{11}\cdot p_{11} && = 0\\
\gamma_{2s} &= \lambda''_{11}\cdot p_{11} && = 0\\
&\vdots\\
\gamma_{(s-1)s} &= \lambda''_{11}\cdot p_{11} && \dots + \lambda''_{(s-1)s}\cdot p_{(s-1)s} = 0
\end{aligned}
\qquad (\Gamma)
$$

On va donc placer les coefficients des p_{jk} de tous les γ_{cd} dans une matrice COGA et cela dans l'ordre décrit ci-dessus, à savoir :

- les lignes de COGA sont telles que chacune contiendra les coefficients λ_{ij}^{cd} d'un γ_{cd} donné. Les s premières lignes correspondront aux éléments γ_{cc} (où c = d), la première étant pour γ_{11} et la $s^{ème}$ pour γ_{ss}, puis viendront les γ_{cd} dans cet ordre : γ_{12} ; γ_{13} , γ_{23} ; γ_{14}, γ_{24}, γ_{34} ; et ainsi de suite jusqu'à : γ_{1s}, ..., $\gamma_{(s-1)s}$.

- les colonnes de COGA contiendront les coefficients λ_{jk}^{it} relatifs à un p_{jk} donné. On mettra d'abord les p_{kk}, de p_{11} à p_{ss}, puis : p_{12} ; p_{13} , p_{23} ; p_{14} , p_{24} , p_{34} ; ... ; p_{1s} , ... , $p_{(s-1)s}$.

Pour avoir un repérage plus rapide de l'emplacement des coefficients relatifs aux γ_{cd} ou aux p_{jk}, on pourra utiliser les règles suivantes :

1°) les coefficients λ_{jk}^{it} d'un même p_{jk} se trouveront tous dans une même colonne de COGA dont on appelle le numéro α et qu'on va déterminer :

* $j = k \Rightarrow p_{kk}$ se trouve à la colonne K .

* $j \neq k \Rightarrow p_{jk}$ se trouve dans la Kème génération de calcul. Il y a donc eu avant lui : s calculs de p_{kk}, 1 calcul pour p_{j2}, 2 calculs pour p_{j3} , ..., (K-2) calculs pour $p_{j(k-1)}$ et (j-1) calculs pour : p_{1k}, ..., $p_{(j-1)k}$. Cela fait en tout, en rajoutant 1 pour p_{jk} lui-même :

$$\alpha = [1 + \dots + (K-2)] + s + j$$
$$= \frac{(K-2)(K-1)}{2} + s + j \quad .$$

Donc le coefficient de p_{jk} se trouvera toujours à la colonne de COGA dont le numéro α est donné par :

$$\alpha = \frac{(K-2)(K-1)}{2} + s + j \qquad \text{si} \quad j \neq K$$
$$\alpha = K \qquad \text{si} \quad j = K \quad .$$

2°) De même, les coefficients λ_{cd}^{ij} d'un même γ_{cd} se trouveront à la ligne de COGA de numéro β, déterminé comme suit :

* $c = d \Rightarrow \gamma_{cc}$ se trouve à la ligne c .

* $c \neq d \Rightarrow \gamma_{cd}$ se trouve dans la $d^{ème}$ génération de calcul. Il y a donc eu avant lui :

s calculs de γ_{cc}, 1 calcul pour γ_{c2}, 2 calculs pour γ_{c3}, ..., (d-2) calculs pour $\gamma_{c(d-1)}$ et (c-1) calculs pour sa génération : $\gamma_{1d}, \dots, \gamma_{(c-1)d}$. Cela fait en tout, en rajoutant 1 pour γ_{cd} lui-même :

$$\beta = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + s + c$$

Donc le coefficient γ_{cd} se trouvera dans COGA à la ligne numéro β tel que :

$$\beta = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + s + c \qquad \text{si} \quad c \neq d$$
$$\beta = c \qquad \text{si} \quad c = d \quad .$$

On a pris COGA comme étant une matrice à $\frac{s(s+1)}{2}$ lignes et $\frac{s(s+1)}{2} + 1$ colonnes. Le nombre de colonnes est supérieur de 1 à celui des lignes. Cette colonne supplémentaire de COGA va servir à loger le second membre du système des γ_{cd}, soit donc les éléments de la matrice H, système appelé (Γ). Cette colonne contiendra donc : 1 sur les s première lignes et 0 partout ailleurs. Le nombre $\frac{s(s+1)}{2}$, correspondant au nombre d'équations :

$$\gamma_{cd} = \delta_{cd} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad c = d \\ 0 & \text{si} \quad c \neq d \end{cases},$$

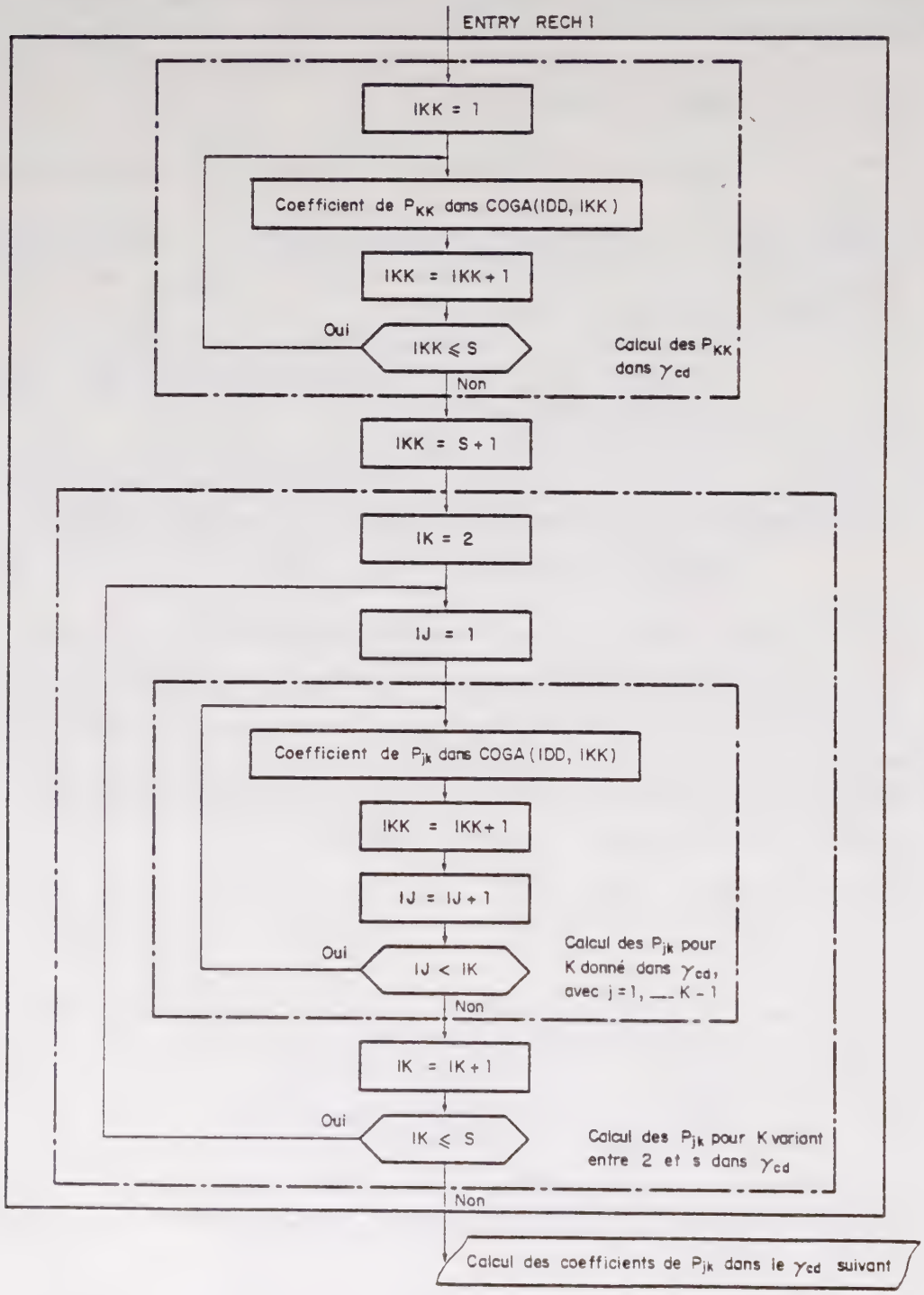
et au nombre d'inconnues p_{jk}, peut être calculé en sachant que la matrice P est symétrique, et que l'on compte le nombre des p_{jk} se trouvant sur la diagonale principale et au-dessus, soit :

$$1 + 2 + \dots + s = \frac{s(s+1)}{2}$$

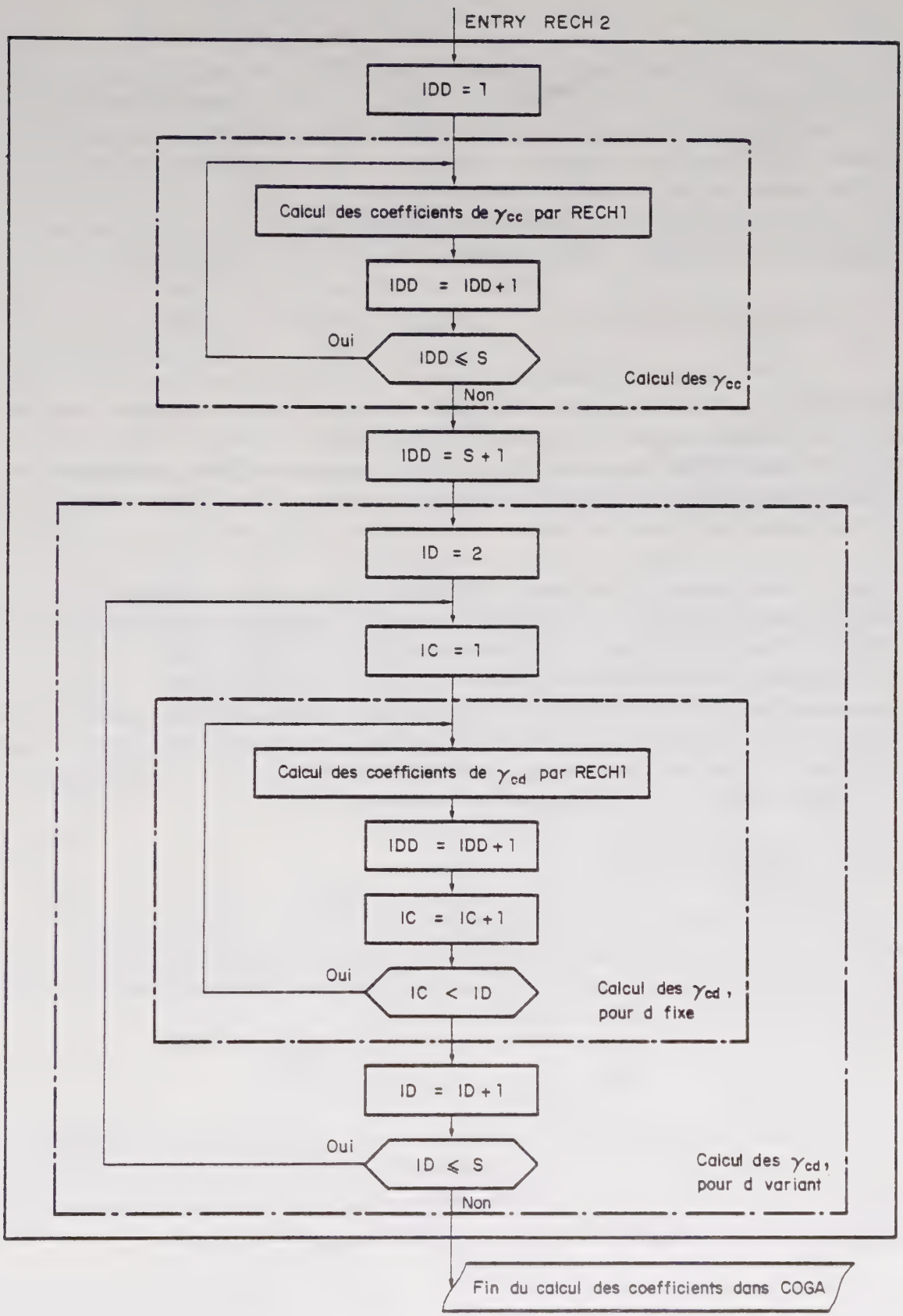
Connaissant ainsi la base théorique du calcul des coefficients λ_{jk}^{cd} de COGA, permettant le calcul de P, on va exposer l'algorithme RECH, qui permet le calcul effectif de la matrice

COGA. RECH se compose de deux parties RECH1 et RECH2.On commence le traitement par RECH2 qui fait les initialisations nécessaires et commande le calcul des coefficients de P dans les γ_{cd} consécutifs. Donc RECH2 veille à assurer la bonne séquence des γ_{cd} l'un après l'autre, en commençant par les γ_{cc} et finissant par les autres. Et à chaque nouveau γ_{cd}, RECH2 passe la main à RECH1, qui dans le cadre de ce γ_{cd} donné, veillera au calcul séquentiel des coefficients des p_{jk}, en commençant par les p_{kk} pour finir par les autres p_{jk}. Quand il a fini de calculer tous les coefficients des p_{jk} dans un γ_{cd} donné, RECH1 remet les commandes à RECH2 qui ordonne de passer au γ_{cd} suivant, et cela dans l'ordre explicité ci-dessus. Ces détails sont repris dans les organigrammes de RECH1 et RECH2 exposés ci-après.

V-5.2. Organigramme de RECH1 -



V-5.3. Organigramme de RECH2 -



V-5.4. Calcul de la matrice P -

Ayant ainsi calculé la matrice des coefficients A' et le second membre B' :

$$A'.X = B'$$

où A' est égale aux $\frac{s(s+1)}{2}$ premières lignes de COGA, et B' la dernière colonne de COGA. X qui représente les éléments de P sera calculé par la résolution du système ainsi défini. Pour cette résolution, on a encore fait appel à l'algorithme ALGAU pour ses différentes qualités, déjà exposées. La solution de ce système sera trouvée à la place du second membre, et donc dans la dernière colonne de COGA. On remplira alors la matrice $P_{s\,x\,s}$ avec ces valeurs rangées dans un ordre qu'on a déjà précisé. Il faudra donc maintenant tester $P_{s\,x\,s}$, pour voir si cette matrice est s.d.p. ou ne l'est pas : c'est ce que nous allons voir dans la partie suivante.

V-6. CALCUL DES VALEURS PROPRES DE $P_{s\,x\,s}$: METHODES DE GIVENS ET RUTISHAUSER [5] [12] [35] -

Parmi toutes les méthodes de test de la propriété pour une matrice carré d'être définie positive, on a cité au paragraphe I-2.10 les quatre les plus pratiques. Puis, après évaluation de ces quatre méthodes au paragraphe I-2.10.5, on a finalement retenu la méthode de calcul des valeurs propres de la matrice, pour son aspect plus pratique, moins onéreux et la possibilité d'interprétation qu'elle offre, puisqu'elle permet de juger si une matrice est presque ou "plus ou moins" positive.

Parmi toutes les méthodes de calcul des valeurs propres, on peut citer la méthode de LANCZOS, celle de LE VERRIER, de JACOBI, de RUTISHAUSER, les méthodes itératives et la méthode du gradient. Dans le cas d'une matrice symétrique pouvant être assez grande, la meilleure et la plus rapide semble être celle de RUTISHAUSER associée à la méthode de GIVENS. La méthode de GIVENS elle-même utilise celle de JACOBI pour transformer une matrice symétrique en une matrice tridiagonale. A ce stade interviendra la méthode de RUTISHAUSER, qui transformera la matrice tridiagonale en un produit de deux matrices L.S, l'une triangulaire inférieure et l'autre triangulaire supérieure, qui nous permettront de calculer ces valeurs propres.

V-6.1. Méthode de JACOBI -

Cette méthode s'applique aux matrices symétriques. Les valeurs propres de ces matrices sont toutes réelles et les vecteurs propres correspondants sont orthogonaux entre eux. On peut ramener la matrice M à une forme diagonale, qui a précisément les valeurs propres de M sur sa diagonale, par des transformations du type :

$$T^{-1}.A.T$$

où T est une matrice orthogonale ($T^{-1} = T^{T}$). Pour plus de détails, on pourra se reporter au paragraphe I-2.10.1. La méthode de JACOBI consiste à déterminer la transformation T en question par une approche de tâtonnement raisonné et systématique. On définit une première matrice T comme suit, avec : $T = (t_{ij})$

$$T: \begin{cases} t_{ij} = 0 & , \ i,j \neq p,q \quad et \quad i \neq j \\ t_{ii} = 1 & , \ i \neq p,q \\ t_{pp} = \cos\varphi & t_{pq} = \sin\varphi \\ t_{qp} = \sin\varphi & t_{qq} = -\cos\varphi \end{cases}$$

on a alors : $T^{-1} = T^T$

On forme la matrice :

$$B = T^{-1} A T$$

On peut vérifier que B est symétrique. En effectuant une série d'opérations de ce type, on obtient une matrice dont les éléments diagonaux deviennent prépondérants par rapport aux autres au fur et à mesure de l'itération de ces opérations.

V-6.2. Méthode de GIVENS -

Cette méthode s'inspire de celle de JACOBI mais transforme la matrice symétrique M par un nombre fini d'opérations en une matrice tridiagonale, qui sera elle-même traitée par la méthode de RUTISHAUSER. Comme cette méthode est utilisée effectivement dans le cadre de la résolution de $P_{s \times s}$, on va expliciter en détail son principe. En partant de la matrice symétrique M (ici P), on prend des transformations T du même type que celles définies au paragraphe V-6.1. En choisissant alors un couple d'éléments (p,q), on arrive à annuler l'élément (p-1,q) par un choix convenable de l'argument φ, qui sera défini ci-après. L'élément (p,q) de M désignera l'élément placé à l'intersection de la ligne p et de la colonne q. On va alors suivre le procédé suivant :

On annule les éléments (1,3), ..., (1,n) à l'aide des éléments (2,3), ..., (2,n). Puis on annule les éléments (2,4), ..., (2,n) avec (3,4), ..., (3,n), etc... L'avantage par rapport à la méthode de JACOBI est que les éléments annulés restent nuls jusqu'à la fin du calcul. L'algorithme est le suivant :

Algorithme -

Soit $A^{(p)}$ la matrice obtenue après annulation de la ligne (p-1) de la matrice $A^{(p-1)}$

$$\sigma = \frac{a_{p-1,q}}{a_{p-1,p}}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}}$$

$$a^{(p)}_{p-1,p} = a^{(p-1)}_{p-1,p} \cdot \sqrt{1+\sigma^2}$$

$$a^{(p)}_{p-1,q} = 0$$

$$a_{iq}^{(p)} = -a_{iq}^{(p-1)} \cdot \cos\varphi + a_{pi}^{(p-1)} \cdot \sin\varphi \qquad , i = p+1, \ldots, q-1$$

$$a_{pj}^{(p)} = a_{pj}^{(p-1)} \cdot \cos\varphi + a_{jq}^{(p-1)} \cdot \sin\varphi \qquad , j = p+1, \ldots, q-1$$

$$a_{pj}^{(p)} = a_{pj}^{(p-1)} \cdot \cos\varphi + a_{qj}^{(p-1)} \cdot \sin\varphi \qquad , j = q+1, \ldots, n$$

$$a_{qj}^{(p)} = -a_{qj}^{(p-1)} \cdot \cos\varphi + a_{pj}^{(p-1)} \cdot \sin\varphi \qquad , j = q+1, \ldots, n$$

$$a_{pp}^{(p)} = a_{pp}^{(p-1)} \cdot \cos^2\varphi + a_{qq}^{(p-1)} \cdot \sin^2\varphi + 2 \cdot a_{pq}^{(p-1)} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

$$a_{qq}^{(p)} = a_{pp}^{(p-1)} \cdot \sin^2\varphi + a_{qq}^{(p-1)} \cdot \cos^2\varphi - 2\, a_{pq}^{(p-1)} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

$$a_{pq}^{(p)} = \left(a_{pp}^{(p-1)} - a_{qq}^{(p-1)} \right) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - a_{pq}^{(p-1)} \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \right)$$

$a_{iq}^{(p)}$ et $a_{pj}^{(p)}$ se calculent pour : q = p+2, ..., n .

Ayant ainsi transformé la matrice symétrique M en matrice tridiagonale, on peut alors lui appliquer la méthode de RUTISHAUSER.

V-6.3. Méthode de RUTISHAUSER -

Dans sa formule la plus générale, cette méthode consiste à transformer une matrice carrée quelconque en un produit de deux matrices triangulaires, l'une inférieure et l'autre supérieure. Sous certaines conditons on peut montrer que cette décomposition est possible et qu'elle est unique. On peut alors écrire :

$$A_0 = A = L_1 . S_1 \quad , \quad L : \text{inférieure}, \quad S : \text{supérieure.}$$

On refait alors le produit : $S_1 . L_1$. On l'appelle A_1, et on décompose A_1 en un produit de deux matrices du même type : $L_2 . S_2$, et ainsi de suite. On a donc :

$$A_0 = L_1 . S_1$$

$$A_1 = S_1 . L_1 = L_2 . S_2$$

$$A_2 = S_2 . L_2 = L_3 . S_3$$

$$\vdots$$

$$A_p = S_p . L_p = L_{p+1} . S_{p+1}$$

$$\vdots$$

On peut alors écrire :

$$A_p . S_p = S_p . L_p . S_p = L_{p+1} . S_{p+1} . S_p$$

$$= S_p . A_{p-1}$$

Or S_p est une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont pris égaux à 1 pour avoir une décomposition unique de A_{p-1} en un produit : $L_p . S_p$. Par conséquent : $\det(S_p) = 1$.

Donc Sp étant régulière, elle admet une matrice inverse : S_p^{-1} .

$$\Rightarrow \quad A_p = S_p \cdot A_{p-1} \cdot S_p^{-1}$$
$$A_{p-1} = S_{p-1} \cdot A_{p-2} \cdot S_{p-1}^{-1}$$
$$\vdots$$
$$A_1 = S_1 \cdot A \cdot S_1^{-1}$$

D'où : $A_p = S_p \cdot S_{p-1} \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot A \cdot S_1^{-1} \cdot S_2^{-1} \cdot \ldots \cdot S_p^{-1}$

Si on pose : $\underline{=}_p = S_p \cdot \ldots \cdot S_1$,

alors : $\underline{=}_p^{-1} = S_1^{-1} \cdot \ldots \cdot S_p^{-1}$

Par conséquent :

$$A_p = \underline{=} \cdot A \cdot \underline{=}^{-1}$$

Ap et A sont donc deux matrices semblables. Elles ont par conséquent mêmes valeurs propres. On peut montrer que Ap tend vers la forme triangulaire inférieure dans le cas de valeurs propres simples, et que par conséquent les valeurs propres se trouvent immédiatement sur la diagonale de cette matrice triangulaire.

Or on a pu par la méthode de GIVENS transformer la matrice symétrique M en une forme tridiagonale, qui est précisément une forme très adaptée à la méthode de RUTISHAUSER, et où cette dernière prend une forme très simple. En effet, soit la forme tridiagonale obtenue :

$$M'_o = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{bmatrix}$$

On décompose M'_0 en L.S, en mettant tous les éléments diagonaux de S, soit les s_{ii} égaux à 1 :

$$s_{ii} = 1 \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n$$

Si l_i désigne l'élément de L et s_i celui de S, on aura :

$$l_i = a_i - c_i \cdot s_{i-1}$$

$$s_i = \frac{b_i}{l_i}$$

$$c_1 = b_n = 0$$

On aura donc pour la matrice $A^{(1)}$:

$$A^{(1)} = S.L \Rightarrow c_i^{(1)} = c_i$$

$$a_i^{(1)} = f_i + s_i . c_{i+1}$$

$$b_i^{(1)} = s_i . f_{i+1}$$

, et ainsi de suite pour $A^{(P)}$. On peut encore accélérer la convergence de cette méthode par certaines astuces qui rendent ce programme encore plus performant. Les deux méthodes combinées - celle de GIVENS et celle de RUTISHAUSER - sont très bien adaptées aux matrices symétriques, ce qui est le cas de $P_{s\,x\,s}$. Par conséquent, pour trouver les valeurs propres de $P_{s\,x\,s}$, on fera appel à un sous-programme utilisant ces deux méthodes, ce qui est le cas du sous-programme mathématique AERUGI. Une fois ces valeurs propres calculées, on pourra tirer les conclusions nécessaires pour montrer que $P_{s\,x\,s}$ est définie positive: si toutes les valeurs propres sont positives, $P_{s\,x\,s}$ est s.d.p.

Il suffit en théorie qu'une seule valeur propre soit négative, pour que P ne soit plus s.d.p. En pratique, suivant les modèles, on pourrait tolérer une certaine marge, si par exemple une valeur propre était négative mais très proche de zéro. Cela dépendra de chaque problème particulier et des exigences que l'on a à ce sujet.

V-7. METHODE DE CALCUL DES MATRICES JACOBIENNES $A_{s\,x\,n}$, $B_{s\,x\,n}$, $C_{(n-s)\,x\,n}$ -

On a donc vu comment, à partir de ces trois matrices jacobiennes, on pouvait arriver à étudier les modèles implicites linéaires ou la propagation d'erreur dans les systèmes implicites de type (5),non linéaires dans le cas général, mais pouvant l'être. On a supposé connues ces trois matrices. En fait, en l'état actuel des choses, on est encore tenu de les calculer à la main avec toutes les contraintes que cela impose, surtout pour les très gros systèmes. D'ailleurs on verra sur un exemple comment tout cela est fait. Dans le cas de matrices jacobiennes constantes, les résultats obtenus sur P seront les mêmes en tout point du modèle. Dans le cas des systèmes plus généraux de type (5), les matrices jacobiennes auront des valeurs qui dépendent du point de fonctionnement. C'est pourquoi, pour un modèle donné, on pourra les calculer littéralement ou formellement une fois pour toutes, et donner les valeurs numériques aux différents termes en un point de fonctionnement déterminé. On pourra ainsi analyser la stabilité du modèle le long d'une certaine trajectoire, en prenant certains points importants et en faisant alors subir aux matrices jacobiennes en ces points le traitement indiqué.

Mais les calculs manuels ne sont qu'une première étape. Dans une deuxième étape, il est prévu de raccorder le code LYAPNOV à un autre code appelé NEPTUNIX, spécialisé dans la résolution des gros systèmes algébro-différentiels. Le code NEPTUNIX est déjà opérationnel depuis un certain temps, mais il est prévu d'améliorer sa présentation actuelle pour lui permettre de suivre les besoins des utilisateurs qui ont évolué depuis sa création. Il est en particulier prévu une nouvelle version dans laquelle on pourra avoir accès aux matrices jacobiennes en question : en effet au cours d'une certaine phase des travaux préparatoires au traitement des systèmes, NEPTUNIX détermine ces différentes matrices jacobiennes dans une certaine combinaison. C'est pourquoi une version qui sera bientôt fonctionnelle permettra d'accéder directement à ces matrices. Il suffira de fournir au code NEPTUNIX les équations algébro-différentielles du sytème à étudier dans une forme donnée, qui est très simple et très proche de leur forme mathématique ordinaire. Le code se chargera alors de traiter ce système formellement et de donner les matrices jacobiennes sous une forme littérale. On donnera alors les caractéristiques du point de fonctionnement que

l'on veut étudier et l'on aura alors les 3 matrices jacobiennes sous forme numérique. On pourra alors les communiquer au code LYAPNOV qui les traitera et donnera ses conclusions sur la stabilité du système autour du point de fonctionnement étudié.

Ayant ainsi examiné le code LYAPNOV sous toutes ces faces, on donnera au paragraphe suivant le détail des instructions appelé "listing". Au chapitre suivant on traitera un modèle particulier, avec différents essais pour arriver à une matrice $P_{s\,x\,s}$ s.d.p.

On donnera enfin en annexe, un aperçu de NEPTUNIX 2, et des routines mathématiques utilisées, et empruntées à la bibliothèque mathématique de la CISI : il s'agit des routines ALGAU, ALDET, AERUGI.

V-8. LISTING DU CODE LYAPNOV

```
LYAPUNOV:PROCEDURE OPTIONS(MAIN);
DCL ALDET ENTRY OPTIONS(FORTRAN);
DCL DLOI ENTRY OPTIONS(FORTRAN);
DCL ALGAU ENTRY OPTIONS(FORTRAN);
DCL ASSNGI ENTRY OPTIONS(FORTRAN);
DCL(D2(*),T1(*),T2(*),T3(*),KAUX1(N*N)FIXED BIN(31))CTL;
DCL(A(S,S),B(S,N),C(N-S,N),D(N,N),U(N,S))CTL;
DCL(KAUX(2*N-S)FIXED BIN(31),(B1(2*N-S),C1(2*N-S),AP(N,N-S),
A1(2*N-S,2*N-S))DEC(16))CTL;
DCL(IK,IL,IC,ID,IJ,IQ,S,N,IER)FIXED BIN(31);
DCL(CTG(S*(S+1)/2,S*(S+1)/2+1),P(S,S))CTL;
DCL(MX(N-S)DI) FIXED(31),ATP(N-S,N),CU(N-S,N-S),CV(N-S,N-S),SM(N-S,S))
    CTL;
GET LIST(S,N);
PUT SKIP LIST('S=',S,' N=',N);
PUT SKIP;
DCL(IRN,IDD,I,J,IPRU)FIXED BIN(31);
ALLOCATE A,B,C,D,KAUX1,B2;
GET LIST(A);
PUT LIST('A(S,S)=');
DO I=1 TO S;
PUT SKIP LIST((A(I,J) DO J=1 TO S));
END;
GET LIST(B);
PUT SKIP LIST('B(S,N)=');
DO I=1 TO S;
PUT SKIP LIST((B(I,J) DO J=1 TO N));
END;
GET LIST(C);
PUT SKIP LIST('C(N-S,N)=');
DO I=1 TO N-S;
PUT SKIP LIST(C(I,*));
END;
/* DEBUT TEST MATRICE REGULIERE PAR ALDET:L4.1 */
DO I=1 TO S;
 DO J=1 TO N;
 D(I,J)=B(I,J);
 END;              /* J  */
END;    /*  I   */
DO I=1 TO (N-S);
 DO J=1 TO N;
 D(S+I,J)=C(I,J);
 END;     /* J */
END;  /* I */
IER=-1;
CALL ALDET('N',N,D,DET,KAUX1,B2,IER);
PUT SKIP;
PUT SKIP LIST('DET(BIIC)=',DET);
IF DET=0. THEN DO;
PUT SKIP;
PUT LIST(' MATRICE (BIIC) NON REGULIERE');
```

```
GO TO [illegible];
END; /* [illegible] */
ELSE PUT SKIP LIST('MATRICE(D||C)REGULIERE');
PUT SKIP;
FREE D,KAUX1,B2;
/* FIN TEST MATRICE REGULIERE */
/*  DEBUT CALCUL MATRICE U  */
DETO:
ALLOCATE NX,CU,CV,U,SN;
SIGN=1;
PRE,NX(N-S)=1;
K=1;
ETC:I=1;
ETA:IF C(I,NX(N-S))=0. THEN DO;
I=I+1;
IF I<=N-S THEN GO TO ETA;
ELSE GO TO ETB;
END;
ELSE NX(K)=NX(N-S);
CU(*,K)=C(*,NX(K));
K=K+1;
IF K<=N-S THEN GO TO ETB;
ELSE PRE=PRE+1;
IER=-1;
CV=CU;
ALLOCATE KAUX1,B2;
CALL ALDET(N-S,N-S,CV,DET,KAUX1,B2,IER);
FREE KAUX1,B2;
IF DET¬=0. THEN DO;
PUT SKIP LIST('LES NUMEROS DES COLONNES DE C A DETERMINANT NON NUL SONT
                  DONNES PAR NX');
PUT SKIP LIST('NX(N-S)=');
PUT SKIP LIST(NX);
PUT SKIP LIST('CU(N-S,N-S)=');
DO I=1 TO N-S;
PUT SKIP LIST(CU(I,*));
END;
SIGN=1;
GO TO ALGO3;
END;
ELSE K=K-1;
ETB:NX(N-S)=NX(N-S)+1;
IF NX(N-S)<=N THEN GO TO ETC;
ELSE IF PRE=1 THEN DO;
PUT SKIP LIST('MESSAGE D''ERREUR:IL Y A TROP DE COLONNES NULLES');
GO TO ALGO3;
END;
ELSE T=N-S-1;
ETD:NX(T)=NX(T)+1;
IF NX(T)<=T+S THEN DO;
ETE:I=1;
ETF:IF C(I,NX(T))=0. THEN DO;
I=I+1;
IF I<=N-S THEN GO TO ETF;
```

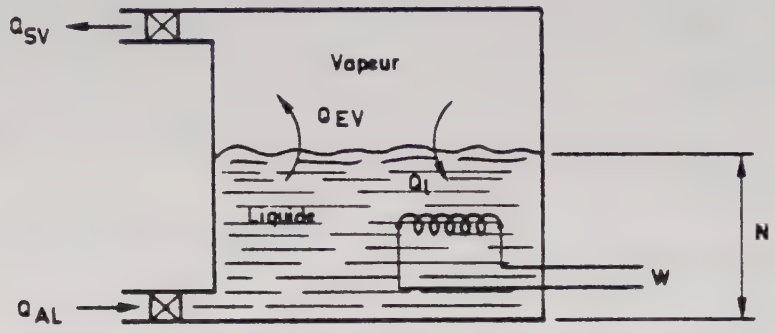
```
ELSE GO TO ETD;
END;
ELSE C(*,T)=C(*,NX(T));
T=T+1;
NX(T)=NX(T-1)+1;
IF T=S THEN GO TO ETC;
ELSE GO TO ETE;
END;
ELSE T=T-1;
IF T=1 THEN GO TO ETD;
ELSE PUT SKIP LIST('MESSAGE D''ERREUR:UNE EQUATION EST FONCTION DES
                    AUTRES');
ALORS:STOP;
END;
ALLOCATE ATP,MAJX1;
IF BIP=1 THEN GO TO TATA;
ELSE K,IE=1;
ETG:J=1;
ETI:IF NX(J)=I THEN GO TO LTI;
ELSE IF I< X(J) THEN GO TO ETJ;
ELSE J=J+1;
IF J<=J-E THEN GO TO ETH;
ETC:J(I,K)=1;
S(*,K)=C(*,I);
K=K+1;
IF K>S THEN GO;
DO I=1 TO S-S;
ATP(*,I)=CJ(*,I);
END;
DO I=1 TO S;
ATP(*,S+I)=S(*,I);
END;
IER=-1;
CALL ALCAN(S-S,S-S,S,ATP,MAJX1,ICP);
PUT SKIP LIST('CALCUL DE J: IER=',IER);
FREE MAJX1;
SOL:DO J=1 TO S;
DO I=1 TO S-S;
J(NX(I),J)=ATP(I,S-S+J);
END SOL;
PUT SKIP LIST('J(',S,')=');
DO I=1 TO S;
PUT SKIP LIST(J(I,*));
END;
GO TO TATA;
END;
LTI:I=I+1;
IF K=1 THEN GO TO LTC;
ELSE GO TO ET ;
TATA;
/*  FIN CALCUL ET IMPRESSION MATRICE J  */
ALLOCATE C(S,P),MAJX1;
/*  CALCUL DES COEF DES DIFFERENTS P(J,K)  */
```

```
/*  DEBUT CALCUL COEF DES GAMMA(C,C)  */
DO IDD=1 TO S;
IC=IDD;
/* COEF P(K,K) DANS GAMMA(C,C) ,C FIXE,K=1 TO S */
 DO IKK=1 TO S;
/* COEF P(K,K) DANS GAMMA(C,C) ,K&C FIXES */
  DO IR=1 TO N;
  COGA(IDD,IKK)=COGA(IDD,IKK)+2*U(IR,IDD)*U(IR,IDD)*A(IKK,IR)*B(IKK,IR)
   ;
  END;  /* IR  */
  DO ID=2 TO N;
   DO IC=1 TO (ID-1);
   COGA(IDD,IKK)=COGA(IDD,IKK)+2*U(IQ,IDD)*U(IR,IDD)*(A(IKK,IQ)*B(IKK,
   IR)+A(IKK,IR)*B(IKK,IQ));
   END;  /*  IC  */
  END;  /*  ID  */
 END;  /*  IKK  */
 IKK=S+1;
/* COEF P(J,K) DANS GAMMA(C,C) ,C FIXE,K=2 TO S */
 DO IK=2 TO S;
/* COEF P(J,K) DANS GAMMA(C,C) ,C FIXE,J=1 TO K-1 */
  DO IJ=1 TO (IK-1);
   DO IR=1 TO N;
   COGA(IDD,IKK)=COGA(IDD,IKK)+2*(A(IJ,IR)*B(IK,IP)+A(IK,IR)*B(IJ,IR))
   *U(IR,IC)*U(IR,IC);
   END;  /*  IR  */
  IKK=IKK+1;
  END;  /*  IJ  */
 END;  /*  IK  */
END;  /*  IDD  */
/*  FIN CALCUL COEF DES GAMMA(C,C)  */
/*  DEBUT CALCUL COEF DES GAMMA(C,D)  */
IDD=S+1;
/*  COEF P(K,K) DANS GAMMA(C,D)  */
DO ID=2 TO N;
 DO IC=1 TO (ID-1);
  DO IKK=1 TO S;
   DO IR=1 TO N;
   COGA(IDD,IKK)=COGA(IDD,IKK)+2*U(IR,IC)*U(IR,ID)*A(IKK,IR)*B(IKK,IR);
   END;  /*  IR  */
   DO IP=2 TO N;
    DO IQ=1 TO (IP-1);
    COGA(IDD,IKK)=COGA(IDD,IKK)+(U(IQ,IC)*U(IR,ID)+U(IR,IC)*U(IQ,ID))
    *(A(IKK,IP)*B(IKK,IQ)+A(IKK,IQ)*B(IKK,IP));
    END;  /*  IQ  */
   END;  /*  IR  */
  END;  /*  IKK  */
/*  COEF P(J,K) DANS GAMMA(C,D)  */
```

```
 IK=IK+1;
 END;  /*  IL  */
END;  /*  IK  */
/*  FIN CALCUL COEF DES GAMMA(C,D)  */
DO I=1 TO S;
COGA(I,S*(S+1)/2+1)=1.;
END;
PUT SKIP LIST('COGA(S*(S+1)/2,S*(S+1)/2+1)=');
DO I=1 TO S*(S+1)/2;
PUT SKIP LIST(COGA(I,*));
END;
/* FIN CALCUL DES COEF DES P(J,K)  */
/*  CALCUL DE P(S,S) PAR ALGAU;L201  */
IER=-1,
I=1;
CALL ALGAU(S*(S+1)/2,S*(S+1)/2,I,COGA,KAUX1,IER);
PUT SKIP LIST('CALCUL DE P: IER=',IER);
IF IER=1 THEN DO;
PUT SKIP(3) LIST('LA MATRICE P(S,S)CALCULEE N''A PAS DE SENS.
                 ELLE EST IMPRIMEE POUR VERIFICATION.');
PUT SKIP LIST('IER=',IER);
PUT SKIP(3);
END;
/*  REMPLISSAGE DU TRIANGLE SUPERIEUR DE LA MATRICE P(S,S)  */
DO I=1 TO S;
P(I,I)=COGA(I,S*(S+1)/2+1);
END;  /*  I  */
DO J=2 TO S;
 DO I=1 TO (J-1);
 P(I,J),P(J,I)=COGA((J-2)*(J-1)/2+S+I,S*(S+1)/2+1);
 END;  /*  I  */
END;  /*  J  */
PUT SKIP LIST('P(S,S)=');
DO I=1 TO S;
PUT SKIP LIST(P(I,*));
END;
FREE KAUX1;
/*  CALCUL DES VALEURS PROPRES DE P(S,S) PAR AERUGI:E201  */
ALLOCATE B2,T1,T2,T3;
CALL AERUGI(P,B2,T1,T2,T3,S);
PUT SKIP;
PUT LIST('VALEURS PROPRES DE P(S,S)');
PUT SKIP LIST((B2(I) DO I=1 TO S));
PUT SKIP;
IK=0;
DO IJ=1 TO S WHILE(IK=0);
IF B2(IJ)<=0. THEN IK=1;
END;  /*  IJ  */
IF IK=1 THEN PUT LIST('P EST UNE MATRICE NON S.D.P.');
        ELSE PUT LIST('P EST UNE MATRICE S.D.P.');
SUB:END LYAPUN;
```

VI - EXEMPLE TRAITE PAR LE CODE LYAPOUNOV

On considère le modèle simplifié de générateur de vapeur suivant, dont les équations ont été bâties à partir du modèle proposé dans [31] :



On a alors les équations suivantes :

(1) $\dot{M}_L - Q_l + Q_{EV} - Q_{AL} = 0$

(2) $\dot{M}_v - Q_{EV} + Q_{SV} + Q_l = 0$

(3) $\tau . \dot{W} + W - W_c = 0$

(4) $M_L . \dot{H}_L + H_L . \dot{M}_L - M_L . V_L . \dot{p} - Q_l . H_{LS} - W + Q_{EV} . H_{VS} - Q_{AL} . H_{AL} = 0$

(5) $M_v . \dot{H}_v + H_v . \dot{M}_v - M_v . V_v . \dot{p} - Q_{EV} . H_{VS} + Q_l . H_{LS} + Q_{SV} . H_v = 0$

(6) $\dot{\varepsilon} + g . (Q_{SV} . H_v - Q_{AL} . H_{AL} - W_c) = 0$

(7) $\dot{Q}_{AL} + K_2 (N - N_c) = 0$

(8) $M_L . V_L + M_v . V_v - V_t = 0$

(9) $Q_l - C_{t_1} . M_v . (1 - X_v) = 0$

(10) $Q_{EV} - C_{t_2} . M_v . X_L = 0$

(11) $N . S - M_L . V_L = 0$

(12) $X_L . (H_{VS} - H_{LS}) - H_L + H_{LS} = 0$

(13) $X_v . (H_{VS} - H_{LS}) - H_v + H_{LS} = 0$

(14) $H_{VS} - g_1 (p) = 0$

(15) $H_{LS} - g_2(p) = 0$

(16) $V_L - g_3(p) = 0$

(17) $V_V - g_4(p) = 0$

(18) $Q_{SV} - K_1 . \varepsilon . p = 0$

(19) $N_c - f_1(t) = 0$

(20) $W_c - f_2(t) = 0$

(21) $H_{AL} - f_3(t) = 0$

Signification des variables -

M_L	Masse liquide
M_V	Masse vapeur
W	Chaleur reçue par la phase liquide à travers les chaufferettes
H_L	Enthalpie de la phase liquide
H_V	Enthalpie de la phase vapeur
p	Pression
ε	Position de la vanne de sortie de vapeur Q_{SV} : $\varepsilon = 0$ si la vanne est fermée et $\varepsilon = 1$ si elle est ouverte complètement : $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$
Q_{AL}	Débit d'eau alimentaire (en masse)
Q_1	Débit de vapeur qui se condense ou débit de condensation
Q_{EV}	Débit d'évaporation
Q_{SV}	Débit de sortie de vapeur par la vanne de sortie
V_L	Volume massique de la phase liquide
V_V	Volume massique de la phase vapeur
H_{LS}	Enthalpie de la phase liquide à saturation
H_{VS}	Enthalpie de la phase vapeur à saturation
H_{AL}	Enthalpie de l'eau alimentaire
X_L	Titre de vapeur à saturation en phase liquide
X_V	Titre de vapeur sèche en phase vapeur

N Hauteur d'eau dans la phase liquide

W_c Chauffage de consigne des chaufferettes

N_c Niveau de consigne de la phase liquide

Signification des constantes -

τ Constante de temps du circuit de chauffage

S Section du G.V.

V_t Volume total du G.V.

$K_1, K_2, g,$ Constantes multiplicatives

C_{t1}, C_{t2}

Signification des équations -

Les équations (1) et (2) traduisent les variations des masses liquide et vapeur respectivement. L'équation (3) représente le circuit de chauffage extérieur. Les équations (4) et (5) représentent les bilans d'énergie dans les phases liquide et vapeur respectivement. L'équation (6) représente le circuit de commande de la position de la vanne de sortie. L'équation (7) représente le circuit de commande de l'entrée d'eau. L'équation (8) est l'équation aux volumes. L'équation (9) exprime le débit de condensation en fonction de M_V et X_V. L'équation (10) exprime le débit d'évaporation en fonction de M_L et X_L. L'équation (11) est l'équation du volume de la phase liquide. Les équations (12) et (13) donnent les relations entre les titres X_L et X_V et les différentes enthalpies. Les équations (14), (15), (16) et (17) expriment le fait que H_{VS}, H_{LS}, V_L et V_V sont des fonctions de la pression. L'équation (18) donne le débit de sortie Q_{SV} en fonction de p et ε. Les équations (19), (20) et (21) expriment le fait que les grandeurs de consigne N_C, W_C et H_{AL} sont des fonctions du temps.

Utilisation du modèle -

Les équations (1) à (7) représentent les équations différentielles du modèle, alors que les autres (8) à (21) représentent les équations algébriques. Les premières fourniront donc les matrices jacobiennes A et B, alors que les autres fourniront la matrice C. On aura ainsi, en laissant vide la case où il y aurait zéro :

$$A_{7 \times 21} = Jx$$

M_L	M_V	W	H_L	H_V	p	ε	Q_{AL}	Q_1	Q_{EV}	Q_{SV}	H_{LS}	H_{VS}	H_{AL}	X_L	X_V	N	V_L	V_V	W_C	N_C
							-1	-1	+1											
								+1	-1	+1										
		+1																	-1	
$\dot{H}_L$ $-V_L.\dot{P}$		-1	$\dot{M}_L$				$-H_{AL}$	$-H_{LS}$	$+H_{VS}$		$-Q_1$	$+Q_{EV}$	$-Q_{AL}$				$-M_L\dot{P}$			
	$+\dot{H}_V$ $-V_V.\dot{P}$			$+\dot{M}_V$ $+Q_{SV}$				$+H_{LS}$	$-H_{VS}$	$+H_V$	$+Q_1$	$-Q_{EV}$					$-M_V\dot{P}$			
				$g.Q_{SV}$			$-gH_{AL}$			$g.H_V$			$-g.Q_{AL}$						-g	
																$+K_2$				$-K_2$

$$B_{7 \times 21} = J\dot{x}$$

+1																				
	+1																			
		τ																		
H_L			M_L		$-M_L.V_L$															
	$+H_V$			$+M_V$	$-M_V.V_V$															
						+1														
							+1													

C_{14x21} =

M_L	M_V	W	H_L	H_V	p	ε	Q_{AL}	Q_l	Q_{EV}	Q_{SV}	H_{LS}	H_{VS}	H_{AL}	X_L	X_V	N	V_L	V_V	W_C	N_C
V_L	V_V																M_L	M_V		
	$-C_{t1}$ $+C_{t1}\cdot X_V$							+1							$C_{t_1} M_V$					
$-C_{t2}X_L$									+1					$-C_{t2}M_L$						
$-V_L$																S	$-M_L$			
			-1								$-X_L+1$	X_L		$H_{VS}-H_{LS}$						
				-1							$-X_V+1$	X_V			$H_{VS}-H_{LS}$					
					$-\frac{\partial H_{VS}}{\partial p}$							+1								
					$-\frac{\partial H_{LS}}{\partial p}$						+1									
					$-\frac{\partial V_L}{\partial p}$												+1			
					$-\frac{\partial V_V}{\partial p}$													+1		
					$-K_1\cdot\varepsilon$	$-K_1\cdot p$				+1										
																				+1
																			+1	
													+1							

Point critique ou point d'équilibre -

On va étudier le modèle autour de son point critique. Ce point est obtenu en écrivant que toutes les dérivées sont nulles.

- $\dot{M}_L = 0 \iff Q_{EV} = Q_l + Q_{AL}$ $\Big\} \iff Q_{SV} = Q_{AL}$
- $\dot{M}_v = 0 \iff Q_{EV} = Q_l + Q_{SV}$ $\Big\}$
- $\dot{W} = 0 \iff W = W_c$ (a)
- $\dot{H}_L = \dot{M}_L = \dot{p} = 0 \iff -Q_l \cdot H_{LS} - W + Q_{EV} \cdot H_{VS} - Q_{AL} \cdot H_{AL} = 0$

Or : $Q_{EV} = Q_l + Q_{AL}$

On obtient donc :

$$Q_\ell = \frac{W_c + Q_{AL}(H_{AL} - H_{VS})}{H_{VS} - H_{LS}}$$

On peut s'arranger pour obtenir Q_1 nul. Il suffit d'avoir :

$$W_c = Q_{AL}.(H_{VS} - H_{AL}) \qquad (e)$$

$\cdot \dot{H}_v = \dot{M}_v = \dot{p} = 0 \iff -Q_\ell . H_{LS} + Q_{EV} . H_{VS} = Q_{SV} . H_v$

Or: $-Q_\ell . H_{LS} + Q_{EV} . H_{VS} = W_c + Q_{AL} . H_{AL}$

D'où : $Q_{SV} . H_v = W_c + Q_{AL} . H_{AL}$

$$H_v = \frac{1}{Q_{AL}} \left(W_c + Q_{AL} . H_{AL} \right)$$

$$\Rightarrow H_v = \frac{W_c}{Q_{AL}} + H_{AL} \qquad (d)$$

Si on suppose toujours Q_1 nul, on a :

$$Q_{EV} = Q_\ell + Q_{AL}$$

$$= Q_{AL}$$

$$\Rightarrow Q_{EV} = Q_{AL} = Q_{SV} \qquad (b)$$

$$et \quad Q_\ell = 0 \qquad (c)$$

$\cdot \dot{\varepsilon} = 0$: On réobtient alors l'équation (d).

$\cdot \dot{Q}_{AL} = 0 \iff N = N_c \qquad (f)$

On se donne donc les valeurs de : N_C, W_C, H_{AL}, Q_{AL}, C_{t1}, C_{t2}, ε.

L'équation (a) donne alors W, et (f) N. L'équation (b) donne Q_{EV} et Q_{SV}, (d) H_V, et (e) H_{VS}. Ayant déterminé H_{VS}, cela détermine automatiquement la valeur de la pression p à l'équilibre par l'intermédiaire des tables de l'eau, ce qui donne également : H_{LS}, V_L, V_V. D'où :

$$M_L = \frac{N_c . S}{V_L}$$

$$X_v = \frac{H_v - H_{LS}}{H_{VS} - H_{LS}}$$

$$M_v = \frac{V_c - M_L . V_L}{V_v}$$

(d) et (e) donnent $H_V = H_{VS}$. D'où :

$$X_v = 1$$

$$\chi_L = \frac{Q_{EV}}{C_{t2} . M_L}$$

$$H_L = \chi_L \left(H_{VS} - H_{LS} \right) + H_{LS}$$

On prend donc :

$Q_{AL} = 477 \text{ kg.s}^{-1}$

$H_{AL} = 0{,}90 \text{ MJ.kg}^{-1}$

$W_C = 900 \text{ MW}$

$N_C = 6 \text{ m}$

$C_{t1} = 0{,}25 \text{ s}^{-1}$

$C_{t2} = 0{,}25 \text{ s}^{-1}$

$\varepsilon = 1$

$S = 6 \text{ m}^2$

$H = 9 \text{ m}$

$V_t = 54 \text{ m}^3$

On a alors à l'équilibre :

$Q_{SV} = 477 \text{ kg.s}^{-1}$

$Q_{EV} = 477 \text{ kg.s}^{-1}$

$Q_1 = 0$

$M_L = 27416{,}05 \text{ kg}$

$M_V = 537{,}79 \text{ kg}$

$p = 5{,}83 \times 10^6 \text{ Pa}$

$H_L = 1{,}314 \times 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$

$H_V = H_{VS} = 2{,}79 \text{ MJ.kg}^{-1}$

$H_{LS} = 1{,}204 \times 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$

$\frac{\partial H_{VS}}{\partial P} = - 10^{-2}$

$\frac{\partial H_{LS}}{\partial P} = 5{,}6 \times 10^{-2}$

$\frac{\partial V_L}{\partial P} = 3{,}26 \times 10^{-11}$

$$\frac{\partial V_V}{\partial P} = -6{,}22 \times 10^{-7}$$

$$X_L = 0{,}07$$

$$X_V = 1$$

$$V_L = 1{,}31 \times 10^{-3}\ m^3.kg^{-1}$$

$$V_V = 3{,}35 \times 10^{-2}\ m^3.kg^{-1}$$

Alors en prenant différentes valeurs pour τ, K_2 et g, le modèle sera asymptotiquement stable autour de son point d'équilibre pour certaines de ces valeurs, et instable dans les autres cas.

En prenant par exemple :

$$K_2 = 8 \quad , \tau = 20, \quad g = 100 \ ,$$

on aura une matrice P non s.d.p., comme on peut le voir ci-après. (cf 1°)

Par contre, si :

$$K_2 = 8, \quad \tau = 20 \ , \ g = 1000/9,$$

on aura P s.d.p. (cf 2°).

J=	7	M=	21	
V(S,M)=				
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000F+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	-1.0[illegible]E+00	-1.0[illegible]E+00	1.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00				
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	1.0[illegible]E+00	-1.00000E+00
1.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00				
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	1.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	-1.00000E+00
0.0[illegible]E+00				
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	-1.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	-7.0[illegible]E+05	-1.2[illegible]E+06	2.79000E+06
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]F+00	4.77[illegible]F+02	-4.77[illegible]F+02	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00				
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	4.77000E+02
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]F+00	0.0[illegible]E+00	1.2[illegible]E+06	-2.79000E+06
2.7[illegible]E+06	0.0000[illegible]E+00	-4.77[illegible]E+02	0.0[illegible]F+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00				
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	4.77000E+03
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]F+00	-9.0[illegible]E+06	0.0[illegible]F+00	0.00000E+00
2.7[illegible]E+07	0.0000[illegible]F+00	0.0[illegible]F+00	-4.77[illegible]F+03	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]F+00	-9.00000E+01
0.0[illegible]E+00				
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
-0.0[illegible]E+00				
V(S,M)=				
1.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00				
0.0[illegible]E+00	1.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00				
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	2.0000[illegible]E+01	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00				
1.31[illegible]E+06	0.0000[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	2.7[illegible]E+04	0.00000E+00
-3.6[illegible]E+01	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+06	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00
0.0[illegible]E+00				
0.0[illegible]E+00	2.79[illegible]E+06	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	5.37[illegible]E+02
1.0[illegible]E+01	0.0000[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.0[illegible]E+00	0.00000E+00

```
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00
C(1-3,1)=
 1.300000E-03  3.300000E-02  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  2.7416+E+04  5.377800E+02  0.000000E+00
 0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  1.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 1.300000E+02  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00
-1.730000E-01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  1.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00 -6.854000E+03
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
-1.300000E-03  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  6.000000E+03 -2.7416+E+04  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00 -1.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  9.200000E-01  6.000000E-02  0.000000E+00  1.580000E+06
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00 -1.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 1.500000E+06  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 9.000000E-03  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  1.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
-5.500000E-02  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  1.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
-3.250000E-11  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  1.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
 0.000000E+00
 0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
```

6.21999E-07	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-8.17999E-05	-4.77000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				

DET(BIIC)= -1.47350E+18

MATRICE(BIIC)REGULIERE

LES NUMEROS DES COLONNES DE C A DETERMINANT NON NUL SONT DONNES PAR MX

MX(N-S)=

1	2	4	5	6
7	9	10	12	13
14	18	20	21	

U(N-S,N-S)=

1.30000E-03	3.34000E-02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	2.74160E+04	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
-1.73999E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
-1.30000E-03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	-2.74160E+04	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	-1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	9.29999E-01	6.99999E-02
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	9.99999E-03
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-5.59999E-02
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-3.25999E-11
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

```
 0.000000E+00   1.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   6.219999E-07
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   -8.179999E-05
-4.770000E+02   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   1.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   1.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 1.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
U(*,3)=
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 4.580148E+03   1.000672E+03
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
-1.791000E+02   -1.665340E+04
 1.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   1.580000E+06   0.000000E+00
 0.000000E+00   -8.264000E+04
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   1.580000E+06
 0.000000E+00   1.000771E+04
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   -1.000771E+06
 0.000000E+00   6.000000E+00   2.000643E-03   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   2.757000E-01
 0.000000E+00   1.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   -1.344400E+02
 0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   6.854000E+03   0.000000E+00
 7.000000E+02   1.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   1.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   -9.000000E+04
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   1.000771E+04
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   1.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   1.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 1.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 1.700000E-10   -5.241111E-05
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   1.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
COGA(3*(S+1)/2,3*(S+1)/2+1)=
```

0.0000[illegible]E+00	0.00000E+00	4.[illegible]E+01	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.00000E+00	-4.[illegible]E+01	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.00000E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.00000E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.00000E+00	0.[illegible]E+00	1.00000E+00	
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.00000E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	-2.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-1.[illegible]E+06	0.[illegible]E+00	-1.[illegible]E+07	1.00000E+00	
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1.169315E+05	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.00000E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	4.192877E-03	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	1.16[illegible]E+04	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	1.00000E+00	
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	1.65[illegible]E+21	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
5.937[illegible]E+14	-5.937[illegible]E+14	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	-1.65[illegible]E+21	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	1.00000E+00	
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	1.00659E+18
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	2.28486E+11	-2.28486E+11
0.0000[illegible]E+00	2.701[illegible]E+17	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	1.28[illegible]E+19	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	1.00000E+00	
7.3[illegible]E+06	2.85473E+05	0.[illegible]E+00	2.67631E+19	2.22214E+18
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	-7.58573[illegible]E+06	0.00000E+00	0.00000E+00
2.0[illegible]E+13	-1.03[illegible]E+13	0.[illegible]E+00	-2.11641E+13	1.59293E+12
0.0000[illegible]E+00	-2.[illegible]E+13	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	7.32823E+04	-2.86367E+03	0.00000E+00
9.62[illegible]E+10	-7.[illegible]E+07	0.[illegible]E+00	1.00000E+00	
4.18[illegible]E+05	0.17[illegible]E+06	0.[illegible]E+00	-0.27[illegible]E+17	4.76528E+19
4.22[illegible]E+07	0.[illegible]E+00	-6.[illegible]54E+06	0.00000E+00	0.00000E+00
8.[illegible]E+11	-1.[illegible]E+13	0.[illegible]E+00	-1.82476E+13	3.41740E+13
0.0000[illegible]E+00	-4.75233E+19	1.68211E+11	-2.46221E+12	0.00000E+00
-1.17[illegible]E+17	-6.[illegible]E+18	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	1.00000E+00	
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	-2.[illegible]E+01	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	-1.[illegible]E+07	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	-1.[illegible]E+08
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	1.00000E+00
-1.[illegible]E+10	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	
0.0000[illegible]E+00	0.00000E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	2.00000E+01
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
5.5[illegible]E+07	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	5.57997E+08
-2.[illegible]E+03	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-1.[illegible]E+08	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.[illegible]E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-1.[illegible]E+03	0.[illegible]E+00	-2.[illegible]E-03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.0000[illegible]E+00	2.79[illegible]E+06	2.79[illegible]E+07	0.00000E+00	

0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-4.33173E+10	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.37048E+05	-1.37048E+05
0.00000E+00	0.00000E+00	-4.25779E+11	0.00000E+00	0.00000E+00
-3.82453E+11	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-3.89856E+16	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-4.33173E+10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-3.89856E+17	0.00000E+00	6.85190E+03	-6.85490E+05	0.00000E+00
1.91226E+10	-1.91226E+10	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	4.33173E+10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	1.23956E+17	1.43687E+01	-1.43687E+01	0.00000E+00
1.20855E+18	-8.69394E+07	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	6.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.68897E+03	-2.68897E+03
0.00000E+00	0.00000E+00	3.22673E+09	0.00000E+00	0.00000E+00
1.26761E+10	-8.49797E+08	0.00000E+00	0.00000E+00	1.50731E+11
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-8.49797E+08	0.00000E+00
0.00000E+00	-7.69736E+14	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	-7.69736E+15	1.34477E+02	-1.34477E+02	0.00000E+00
1.61337E+08	5.92310E+08	7.53657E+09	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.37060E+15
1.57709E+07	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	8.49797E+08
0.00000E+00	0.00000E+00	2.81865E-01	-2.81865E-01	0.00000E+00
3.38232E+05	2.37060E+16	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	6.00000E+00	0.00000E+00	6.99392E+18	-1.62486E+19
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
5.82401E+12	-5.82401E+12	0.00000E+00	5.82390E+12	-5.82390E+12
0.00000E+00	4.19043E+10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3.26465E+20	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-6.01031E+09	0.00000E+00
0.00000E+00	6.25000E+00	0.00000E+00	2.05193E+04	-1.61180E+04
-4.58214E+03	1.79104E+02	5.99787E+10	0.00000E+00	0.00000E+00
-4.49597E+10	4.99741E+08	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.60000E+02
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
-4.58214E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	-5.41640E+15	0.00000E+00
0.00000E+00	8.00000E+00	1.79104E+02	0.00000E+00	0.00000E+00
-1.01804E+10	1.61179E+00	0.00000E+00	4.99741E+08	0.00000E+00
0.00000E+00	4.99731E+14	-4.12213E+10	1.61179E+09	0.00000E+00
-5.41640E+16	4.99731E+15	7.76945E+02	-7.76945E+02	0.00000E+00
2.22347E+09	-2.22347E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	-1.79104E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.39416E+15
0.00000E+00	0.00000E+00	4.58214E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	6.01031E+09	0.00000E+00	1.27786E+10	-9.99403E+08
0.00000E+00	1.67910E+16	1.27786E+11	-4.99701E+09	0.00000E+00
1.67710E+17	-1.39416E+16	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	1.67714E-02	0.00000E+00	

3.13723E+07	1.22758E+06	0.00000E+00	2.11401E+20	9.55562E+18
0.00000E+00	0.00000E+00	-3.26199E+07	0.00000E+00	0.00000E+00
1.63355E+14	-7.71900E+13	0.00000E+00	-9.10096E+13	6.84991E+12
0.00000E+00	-2.29957E+20	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3.46533E+11	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
6.15300E+05	2.40800E+04	0.00000E+00	9.70994E+17	-2.18520E+18
0.00000E+00	0.00000E+00	-6.37081E+05	0.00000E+00	0.00000E+00
1.54812E+12	-9.38059E+11	0.00000E+00	3.32207E+12	-7.16073E+11
0.00000E+00	5.37534E+18	3.75187E+13	-1.34983E+12	0.00000E+00
4.53575E+19	-3.76614E+18	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	6.79765E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	7.65707E+08	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	4.91333E+03	-1.98700E+04
-1.09672E+03	1.60531E+04	1.00360E+18	0.00000E+00	0.00000E+00
-5.53703E+10	1.47514E+10	0.00000E+00	0.00000E+00	1.53376E+09
-2.75707E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
-1.09672E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	6.89136E+14	0.00000E+00
-2.82133E+06	0.00000E+00	1.60531E+04	0.00000E+00	0.00000E+00
-2.21346E+08	1.43460E+10	0.00000E+00	4.47514E+10	0.00000E+00
0.00000E+00	4.02763E+16	-7.37054E+09	1.44300E+11	0.00000E+00
6.89136E+15	4.82762E+17	1.70930E+02	-1.70030E+02	0.00000E+00
5.40000E+08	-5.32310E+03	7.06980E+07	0.00000E+00	
0.00000E+00	-1.60534E+04	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.24056E+17
7.35293E+06	0.00000E+00	1.77672E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	-7.65707E+08	0.00000E+00	3.05786E+09	-8.75404E+10
0.00000E+00	-2.13032E+15	3.05786E+10	-4.47690E+11	0.00000E+00
-2.13532E+16	-1.24350E+18	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
7.51607E+05	1.10030E+08	0.00000E+00	8.75272E+18	8.55767E+20
0.00000E+00	0.00000E+00	-1.17547E+08	0.00000E+00	0.00000E+00
2.39904E+13	-3.10001E+14	0.00000E+00	-3.27609E+14	6.13711E+14
0.00000E+00	-6.60183E+20	1.88768E+03	-1.88768E+03	0.00000E+00
3.32102E+15	-5.27221E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
1.47154E+05	2.15038E+06	0.00000E+00	-1.23539E+17	-2.69595E+19
2.97787E+09	0.00000E+00	-2.30583E+06	0.00000E+00	0.00000E+00
7.39763E+10	-2.48719E+12	0.00000E+00	-5.20506E+12	-3.65407E+12
0.00000E+00	-7.21482E+18	8.26559E+12	-1.20988E+14	0.00000E+00
-5.77083E+16	-3.37270E+20	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
1.74800E+05	1.28273E+07	0.00000E+00	1.54706E+18	9.97699E+19
0.00000E+00	0.00000E+00	-1.45750E+07	0.00000E+00	0.00000E+00
5.45346E+12	-3.63293E+13	0.00000E+00	-4.96369E+13	7.15496E+13
0.00000E+00	-1.01275E+20	3.51242E+11	-1.37351E+10	0.00000E+00
4.61532E+17	-3.83211E+16	8.77381E+03	-1.20427E+05	0.00000E+00
-6.12560E+09	-3.58011E+11	2.20563E+00	0.00000E+00	

P(5,3)=

4.00718E+00	1.07229E+00	2.03857E-02	-1.47531E-06	-1.46010E-07
-2.73712E-04	2.06879E+00			
1.07227E+00	5.53677E-01	-2.42945E-02	-2.97748E-07	-1.38676E-07
9.30921E-09	-6.15433E-02			
2.03357E-02	-2.12945E-02	2.49999E-02	-1.86264E-08	3.72529E-09
1.16315E-09	3.42528E-01			
-1.47531E-06	-2.97748E-07	-1.86264E-08	-7.45058E-09	-7.45098E-09
7.45114E-10	-2.98234E-06			
-1.46010E-07	-1.38676E-07	3.72529E-09	-7.45099E-09	-7.45098E-09
7.45097E-10	-4.82571E-08			
-2.73712E-05	7.36891E-07	1.16415E-09	7.45114E-10	7.45097E-10

S= 7 N= 21

A(S,N)=

0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	-1.00000E+00	-1.00000E+00	1.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	-1.00000E+00
1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	-1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	-9.00000E+05	-1.20000E+06	2.79000E+06
0.00000E+00	0.00000E+00	4.77000E+02	-4.77000E+02	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	4.77000E+02
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.20000E+06	-2.79000E+06
2.79000E+06	0.00000E+00	-4.77000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	5.30000E+03
0.00000E+00	0.00000E+00	-1.00000E+07	0.00000E+00	0.00000E+00
3.10000E+07	0.00000E+00	0.00000E+00	-5.30000E+03	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.10000E+02
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	8.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-8.00000E+00				

B(S,N)=

1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	2.00000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
1.31400E+06	0.00000E+00	0.00000E+00	2.74160E+04	0.00000E+00
-3.60000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	2.79000E+06	0.00000E+00	0.00000E+00	5.37780E+02
-1.80000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
C(N-S,N)=				
1.30999E-03	3.34999E-02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	2.74160E+04	5.37789E+02	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1.34449E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
-1.73999E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-6.85400E+03
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
-1.30999E-03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	-2.74160E+04	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	9.29999E-01	6.99999E-02	0.00000E+00	1.58000E+06
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1.58000E+06	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
9.99999E-03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-5.59999E-02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-3.25999E-11	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

6.21999E-07	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-8.17999E-05	-4.77000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
1.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00
0.00000E+00				
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00				

DET(B11C)= -1.47350E+18
MATRICE(B11C)REGULIERE

LES NUMEROS DES COLONNES DE C A DETERMINANT NON NUL SONT DONNES PAR MX
MX(N-S)=

1	2	4	5	6
7	9	10	12	13
14	18	20	21	

CU(N-S,N-S)=

1.30999E-03	3.39999E-02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	2.74160E+04	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
-1.73999E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
-1.30999E-03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	-2.74160E+04	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	-1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	9.29999E-01	6.99999E-02
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	9.99999E-03
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-5.59999E-02
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-3.25999E-11
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

```
 0.00000E+00          1.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          6.21999E-07
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          -8.17999E-05
-4.77000E+02          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          1.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          1.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 1.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
CALCUL DE U: "E"=                    -1
U(N,3)=
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 4.58014E+03          1.09672E+03
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
-1.79164E+02          -1.60534E+04
 1.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          1.58000E+06          0.00000E+00
 0.00000E+00          -8.26043E+04
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          1.58000E+06
 0.00000E+00          1.00771E+04
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          -1.00771E+06
 0.00000E+00          0.000000E+00          2.09643E-03          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          2.75704E-01
 0.00000E+00          1.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          -1.34449E+02
 0.00000E+00          0.000000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          6.85400E+03          0.00000E+00
 7.96345E+02          1.96830E+02
 0.00000E+00          0.000000E+00          1.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          -9.00321E+04
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          1.00771E+04
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          1.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          1.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 1.00000E+00          0.000000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 1.74622E-10          -5.29111E-05
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          1.000000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00          0.00000E+00
 0.00000E+00          0.000000E+00
```

COGA(S*(S+1)/2,T*(S+1)/2+I)=

0.00000E+00	0.00000E+00	4.00000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000F+00	0.00000F+00
0.00000E+00	0.00000F+00	-4.00000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000F+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000F+00	0.00000F+00
0.00000E+00	0.00000F+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	-2.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-1.80000E+06	0.00000E+00	-2.00000E+07	1.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000F+00	0.00000F+00
1.29978E+05	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	4.19287E-03	0.00000E+00
0.00000E+00	1.16981E+04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000F+00	0.00000E+00	1.65668E+21	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
5.93794E+14	-5.93794E+14	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	-1.65668E+21	0.00000E+00	0.00000F+00	0.00000F+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000F+00	1.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000F+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00659E+18
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.28486E+11	-2.28486E+11
0.00000E+00	2.74183E+17	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	1.42309E+19	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	
7.30025E+06	2.85473E+05	0.00000E+00	2.67631E+19	2.22214E+18
0.00000E+00	0.00000E+00	-7.58573E+06	0.00000E+00	0.00000E+00
2.99602E+13	-1.03890E+13	0.00000E+00	-2.11641E+13	1.59293E+12
0.00000E+00	-2.89853E+19	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	7.32823E+04	-2.66567E+03	0.00000E+00
9.62930E+10	-7.99522E+09	0.00000E+00	1.00000E+00	
4.18578E+05	6.12690E+06	0.00000E+00	-8.27095E+17	4.76528E+19
4.69850E+07	0.00000E+00	-6.54554E+06	0.00000E+00	0.00000E+00
8.92412E+11	-1.76482E+13	0.00000E+00	-1.82476E+13	3.41740E+13
0.00000E+00	-4.75238E+19	1.86901E+11	-2.73579E+12	0.00000E+00
-1.30490E+17	-7.62604E+18	0.00000E+00	0.00000F+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-2.00000E+01	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	-1.80000E+07	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-2.00000E+08
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00
-1.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000F+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.00000E+01
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
5.58000E+07	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	6.20000E+08
-2.09643E-03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000F+00	0.00000F+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000F+00	0.00000E+00
-2.09643E+04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	-2.09643E-03	0.00000E+00	0.00000E+00
-1.88679E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00

0.00000E+00	2.79000E+06	3.10000E+07	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-4.33173E+10	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.37080E+05	-1.37080E+05
0.00000E+00	0.00000E+00	4.25770E+11	0.00000E+00	0.00000E+00
-3.82453E+11	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-3.89856E+16	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-4.33173E+10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-4.33173E+17	0.00000E+00	6.85400E+03	-6.85400E+03	0.00000E+00
1.91226E+10	-1.91226E+10	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	4.33173E+10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	1.20855E+17	1.43689E+01	-1.43689E+01	0.00000E+00
1.34283E+18	-4.00894E+07	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.68899E+03	-2.68899E+03
0.00000E+00	0.00000E+00	3.22679E+09	0.00000E+00	0.00000E+00
1.26961E+10	-8.49707E+08	0.00000E+00	0.00000E+00	1.67479E+11
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-8.49707E+08	0.00000E+00
0.00000E+00	-7.64736E+14	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	-8.49707E+15	1.34449E+02	-1.34449E+02	0.00000E+00
1.61339E+08	5.92319E+08	8.37399E+09	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.37068E+15
1.75555E+07	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	8.49707E+08
0.00000E+00	0.00000E+00	2.81865E-01	-2.81865E-01	0.00000E+00
3.38238E+05	2.63409E+16	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	6.98882E+18	-1.62486E+19
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
5.82401E+12	-5.82401E+12	0.00000E+00	5.82390E+12	-5.82390E+12
0.00000E+00	4.19063E+19	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3.62739E+20	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-6.01831E+09	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.05190E+04	-1.61180E+04
-4.58014E+03	1.79104E+02	5.04878E+10	0.00000E+00	0.00000E+00
-4.49692E+10	4.99701E+08	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.60000E+02
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	
-4.58014E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	-5.41648E+15	0.00000E+00
0.00000E+00	8.00000E+00	1.79104E+02	0.00000E+00	0.00000E+00
-1.01404E+10	1.61194E+08	0.00000E+00	4.99701E+08	0.00000E+00
0.00000E+00	4.49731E+14	-4.58014E+10	1.79104E+09	0.00000E+00
-6.01831E+16	4.99701E+15	7.96945E+02	-7.96945E+02	0.00000E+00
2.22347E+09	-2.22347E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	
0.00000E+00	-1.79104E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.39416E+15
0.00000E+00	0.00000E+00	4.58014E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	6.01831E+09	0.00000E+00	1.27786E+10	-9.99403E+08
0.00000E+00	1.07910E+16	1.41984E+11	-5.55223E+09	0.00000E+00
1.86567E+17	-1.54907E+16	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

```
 0.00000E+00   0.00000E+00   1.67714E-02   0.00000E+00
 3.13923E+07   1.22758E+06   0.00000E+00   2.11401E+20   9.55562E+18
 0.00000E+00   0.00000E+00  -3.26199E+07   0.00000E+00   0.00000E+00
 1.63355E+14  -7.91960E+13   0.00000E+00  -9.10096E+13   6.84991E+12
 0.00000E+00  -2.20957E+20   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00
 0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00
 3.46538E+11   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00
 6.15800E+05   2.40806E+04   0.00000E+00   9.70994E+17  -2.18528E+18
 0.00000E+00   0.00000E+00  -6.39881E+05   0.00000E+00   0.00000E+00
 1.54812E+12  -8.38059E+11   0.00000E+00   3.32289E+12  -7.16073E+11
 0.00000E+00   5.37344E+18   3.83541E+13  -1.49982E+12   0.00000E+00
 5.03973E+19  -4.18449E+18   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00
 0.00000E+00   6.79765E+09   0.00000E+00   0.00000E+00
 0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00   7.65707E+08   0.00000E+00
 0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00   4.91353E+03  -1.98700E+04
-1.09672E+03   1.60534E+04   1.00360E+10   0.00000E+00   0.00000E+00
-5.53998E+10   4.47514E+10   0.00000E+00   0.00000E+00   1.70417E+09
-2.75704E-01   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00
 0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00
-1.09672E+03   0.00000E+00   0.00000E+00   6.89136E+14   0.00000E+00
-2.75704E+06   0.00000E+00   1.60534E+04   0.00000E+00   0.00000E+00
-2.21346E+08   1.48480E+10   0.00000E+00   4.47514E+10   0.00000E+00
 0.00000E+00   4.02763E+16  -1.09672E+10   1.60534E+11   0.00000E+00
 7.65707E+15   4.47514E+17   1.90830E+02  -1.90830E+02   0.00000E+00
 5.40085E+08  -5.32410E+08   8.52089E+07   0.00000E+00
 0.00000E+00  -1.60534E+04   0.00000E+00   0.00000E+00  -1.24856E+17
 8.72548E+06   0.00000E+00   1.09672E+03   0.00000E+00   0.00000E+00
 0.00000E+00  -7.65707E+08   0.00000E+00   3.05986E+09  -8.75404E+10
 0.00000E+00  -2.13632E+15   3.39985E+10  -4.97656E+11   0.00000E+00
-2.37367E+16  -1.38729E+16   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00
 0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00
 7.51697E+06   1.10030E+08  -1.17547E+08   8.75272E+18   8.55767E+20
 0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00
 2.39904E+13  -3.10001E+14   1.88968E+03  -3.27699E+14   6.13711E+14
 0.00000E+00  -8.64188E+20   0.00000E+00  -1.88968E+03   0.00000E+00
 3.09102E+18  -5.27221E+09   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00
 0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00
 1.47454E+05   2.15838E+06   0.00000E+00  -1.23539E+17  -2.69595E+19
 2.30875E+09   0.00000E+00  -2.30583E+06   0.00000E+00   0.00000E+00
 7.39964E+10  -2.48710E+12   0.00000E+00  -5.20506E+12  -3.65407E+12
 0.00000E+00  -7.21482E+18   9.18399E+12  -1.34431E+14   0.00000E+00
-6.41202E+18  -3.74676E+20   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00
 0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00
 1.74806E+06   1.28278E+07   0.00000E+00   1.54786E+18   9.97699E+19
 0.00000E+00   0.00000E+00  -1.45759E+07   0.00000E+00   0.00000E+00
 5.45046E+12  -3.63293E+13   0.00000E+00  -4.06369E+13   7.15496E+13
 0.00000E+00  -1.01275E+20   3.90269E+11  -1.52613E+10   0.00000E+00
 5.12814E+17  -4.25799E+16   8.77381E+03  -1.28427E+05   0.00000E+00
-6.12566E+09  -3.58011E+11   2.20563E+00   0.00000E+00
CALCUL DE P: IER=                    -1
P(8,8)=
 1.62011E+00   3.20537E-01   1.03845E-02  -5.16093E-07  -5.34583E-08
-8.29216E-09   1.56349E-01
 3.20537E-01   4.19892E-01  -1.18256E-02  -8.92586E-08  -1.38100E-07
 1.30062E-08   4.43315E-02
 1.03845E-02  -1.18256E-02   2.49999E-02  -7.45058E-09   7.45058E-09
 9.31322E-10   2.27404E-01
-5.16093E-07  -8.92586E-08  -7.45058E-09   1.29804E-10   1.29741E-10
-1.16716E-11  -7.98025E-07
-5.34583E-08  -1.38100E-07   7.45058E-09   1.29741E-10   1.29776E-10
```

ANNEXE : NEPTUNIX 2 - APERÇU

(cf. [26], [27], [28])

Les algorithmes d'intégration utilisés par les logiciels de simulation supposent que les équations différentielles décrivant le modèle sont écrites sous la forme explicite :

$$\dot{x} = f(x,t)$$

De plus, le pas d'intégration est limité par la plus petite constante de temps du modèle simulé. Certains logiciels (CSMP [29], ACSL [30]) ont tourné cette difficulté en offrant une méthode d'intégration "STIFF", basée sur l'algorithme de GEAR [8]. Cette méthode suppose le calcul de la matrice jacobienne du système d'équations par différentiation numérique puis l'inversion de cette matrice. Outre l'imprécision du calcul de la matrice jacobienne, cette méthode a l'inconvénient d'être coûteuse en temps d'exécution.

CSMP et ACSL offrent un certain nombre de fonctions fort utiles en simulation (limiteur, espace mort, fonction step, comparateur).

Ces fonctions amènent des discontinuités sur les variables ou leur dérivée sans qu'il soit possible de recaler le pas d'intégration sur la discontinuité. Cela est dû au fait que les variables logiques n'ont pas de statut particulier dans ces langages.

Enfin, toutes les phases (compilation, édition de liens, intégration) d'un logiciel de simulation s'exécutent sur un même ordinateur. Le couplage en temps réel à un processus extérieur ne peut se faire que si le logiciel est implanté sur un mini-ordinateur.

NEPTUNIX 2 admet la description d'un modèle sous la forme d'équations algébro-différentielles implicites :

$$f(x,\dot{x},t) = 0$$

La méthode d'intégration (26), à pas et à ordre variable, est une généralisation de la méthode de GEAR, mais la matrice jacobienne est calculée de manière exacte par dérivation formelle des fonctions f au moment de la compilation. Le code de calcul de la matrice jacobienne et le code d'inversion de cette matrice sont spécifiques au modèle soumis et subissent une optimisation poussée, ce qui rend l'algorithme d'intégration très efficace. Aussi NEPTUNIX 2 peut accepter des modèles décrits par plusieurs centaines d'équations.

Une originalité de NEPTUNIX 2 est la gestion centralisée des variables logiques. Cela permet de considérer que les discontinuités divisent l'intervalle d'intégration en une suite d'intervalles élémentaires, sur lesquels toutes les variables sont continues.

Enfin, NEPTUNIX 2 est conçu dans une optique d'informatique répartie, concrétisée par le développement des réseaux informatiques. La phase non numérique (compilation, optimisation, etc...) est exécutée sur un gros ordinateur, la phase numérique (intégration) est exécutée sur

gros ordinateur pour la mise au point du modèle et sur mini-ordinateur pour l'exploitation du modèle (figure 1).

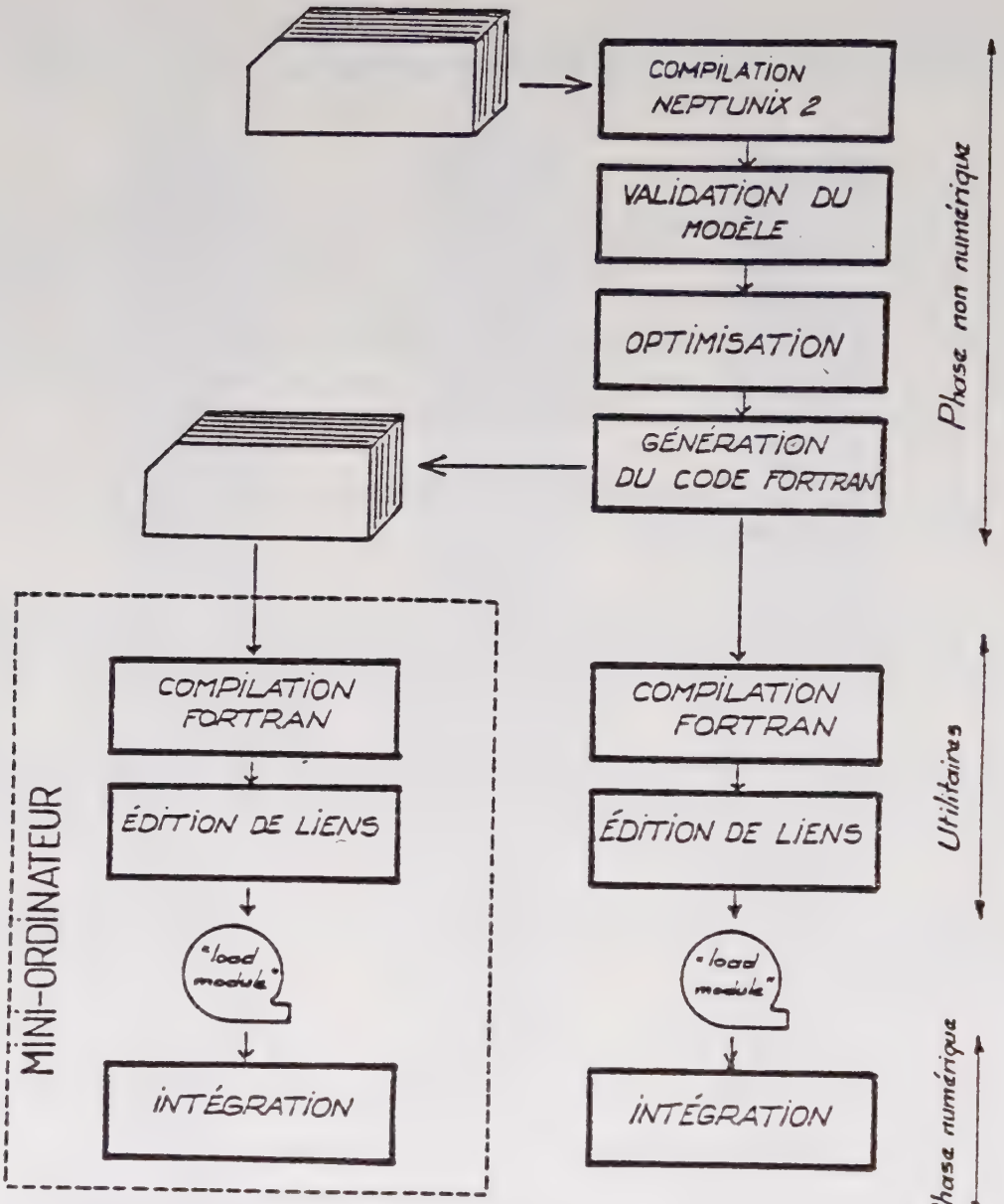


FIGURE 1 - Structure générale de NEPTUNIX 2

CISI

I 201

SEPT. 1974

BIBLIOTHEQUE MATHEMATIQUE

NOM ALGAU

OBJET Résolution de système linéaire à coefficients réels a_{ij} de N équations à N inconnues $x_i^{(k)}$ avec possibilité de plusieurs seconds membres réels $b_i^{(k)}$:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\ x_j^{(k)} = b_i^{(k)} \quad , \ 1 \leqslant i \leqslant N \ , \ \ 1 \leqslant k \leqslant M.$$

APPEL CALL ALGAU (IA, N, M, A, KAUX, IER)

1°) Arguments d'entrée

IA entier, première dimension du bloc A ci-dessous défini, avec IA ⩾ N.

N entier, ordre du système linéaire (N ⩾1).

M entier, nombre de seconds membres (M ⩾1).

A bloc réel bidimensionné dont la première dimension est IA et la seconde au moins égale à N + M. Il contient les coefficients a_{ij} et les seconds membres $b_i^{(k)}$ du système, disposés de la façon suivante :

$$A(i, j) = a_{ij}, \quad A(i, N+k) = b_i^{(k)}$$

pour $1 \leqslant i, j \leqslant N$ et $1 \leqslant k \leqslant M$.

IER entier permettant d'arrêter (auquel cas la valeur donnée de IER doit être nulle) ou non (IER = -1) l'exécution du programme appelant en cas de matrice singulière ou quasi singulière.

Compagnie Internationale de Services en Informatique
BP n°2 - 91190 - Gif-sur-Yvette - Tel : 941.80.00

2°) Arguments de sortie

A — les M vecteurs inconnus $\{ x_i^{(k)} \}$ correspondant aux M seconds membres donnés, se trouvent stockés dans les M colonnes A (i, N + k), $1 \leq i \leq N$, $1 \leq k \leq M$ du bloc A, à la place des seconds membres $b_i^{(k)}$.

Les coefficients a_{ij} et les seconds membres $b_i^{(k)}$ du système linéaire étant détruits, il convient de les sauvegarder avant l'appel au sous-programme si besoin est.

IER — inchangé si la matrice (a_{ij}) est régulière.

IER = 1, avec impression du diagnostic "MATRICE SINGULIERE" si la matrice (a_{ij}) est singulière.

IER = 2, avec impression du diagnostic "MATRICE QUASI SINGULIERE" si la matrice (a_{ij}) est quasi singulière.

La matrice (a_{ij}) est dite quasi singulière si la valeur absolue calculée d'un pivot est inférieure à l'erreur d'arrondi maximum que l'on peut commettre au cours de son calcul.

Les entiers IA , N et M sont inchangés.

3°) Bloc de travail

KAUX — bloc unidimensionné de nombres entiers, de dimension au moins égale à N.

METHODE EMPLOYEE

Méthode directe d'élimination de GAUSS avec recherche de pivot maximum par ligne.

REFERENCES

On pourra se reporter à :

- F.R. GANTMACHER : "The Theory of Matrices"
CHELSEA Publishing Company, 1959.

- J.H. WILKINSON : "Error Analysis of Direct Methods of Matrix Inversion"
JACM, Vol. 8, N° 3, 1961.

- H. NGUYEN NGOC : "Méthodes numériques des sous-programmes de la rubrique ALGEBRE LINEAIRE".
Manuel CISI N° 36, 1974.

CISI

L 401

SEPT. 1974

BIBLIOTHEQUE MATHEMATIQUE

NOM ALDET

OBJET Calcul du déterminant d'ordre N dont les termes sont réels.

APPEL CALL ALDET (IA, N, A, DET, KAUX, B, IER)

1°) Arguments d'entrée

IA entier, première dimension du bloc A ci-dessous défini, avec IA ≥ N.

N entier, ordre du déterminant (N ≥ 1).

A bloc réel bidimensionné dont la première dimension est IA et la seconde au moins égale à N.
Il contient les termes a_{ij} du déterminant : A (i,j) = a_{ij},
$1 \leq i, j \leq N$.

IER entier permettant d'arrêter (auquel cas la valeur donnée de IER doit être nulle) ou non (IER = -1) l'exécution du programme appelant en cas de dépassement de capacité : valeur du déterminant supérieure à 10^{75} en module.

2°) Arguments de sortie

DET scalaire réel contenant la valeur du déterminant.

IER inchangé si DET < 10^{75}.

IER = 1, avec impression du diagnostic "VALEUR DU DETERMINANT SUPERIEURE A 10 * * 75" si la valeur du déterminant est supérieure à 10^{75} en module.

3°) Blocs de travail

KAUX bloc entier unidimensionné de dimension au moins égale à N.

B bloc réel unidimensionné de dimension au moins égale à N.

Compagnie Internationale de Services en Informatique
BP n°2 - 91190 - Gif-sur-Yvette - Tél : 941.80.00

Remarque

Les A (i,j), $1 \leq i, j \leq N$, ne contiennent plus les termes a_{ij} du déterminant. Il convient donc de les sauvegarder avant l'appel au sous-programme si besoin est.

Les entiers IA et N sont inchangés.

METHODE EMPLOYEE

Méthode d'élimination de GAUSS avec recherche de pivot maximum par ligne.

REFERENCES

On pourra se reporter à :

- D.K. FADDEEV, V.N. FADDEEVA : "Computational Methods of Linear Algebra". FREEMAN, 1963.
- H. NGUYEN NGOC : "Méthodes numériques des sous-programmes de la rubrique ALGEBRE LINEAIRE". Manuel CISI N° 36, 1974.

EXEMPLE SIMPLE D'APPLICATION

1°) Soit à calculer le déterminant d'ordre 3 :

$$\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

E 201
Sept. 1974

BIBLIOTHEQUE MATHEMATIQUE CISI

NOM AERUGI

OBJET Calcul, par la méthode de GIVENS-RUTISHAUSER, des valeurs propres d'une matrice symétrique d'ordre N :

$$(a_{ij}) \ , \quad 1 \leq \ i,j \ \leq N.$$

APPEL CALL AERUGI (A,B,T,U,V,N)

1°) Arguments d'entrée

N entier, ordre de la matrice (a_{ij}) , $1 \leq \ i,j \ \leq N$.

A bloc réel bidimensionné de dimensions (N,N), contenant les éléments de la matrice : $A(i,j) = a_{ij}$, $1 \leq \ i,j \ \leq N$. On pourra fournir seulement les éléments diagonaux et extra-diagonaux supérieurs :

$$A(i,j) = a_{ij} \ , \quad 1 \leq i \leq j \leq N.$$

2°) Argument de sortie

B bloc réel unidimensionné de dimension au moins égale à N , contenant les valeurs propres λ_i :

$$B(i) = \lambda_i \ , \quad 1 \leq i \leq N.$$

3°) Blocs de travail

T,U,V blocs réels unidimensionnés de dimension au moins égale à N.

CONSERVATION DES DONNEES

La matrice (a_{ij}) étant détruite, il convient de la sauvegarder avant l'appel au sous-programme si besoin est.

L'entier N est inchangé.

DIAGNOSTIC

Néant.

METHODE EMPLOYEE

La matrice symétrique donnée est d'abord transformée, par la méthode de GIVENS, en une matrice tridiagonale symétrique dont on calcule ensuite les valeurs propres par la méthode LR de RUTISHAUSER accélérée à convergence quadratique (voir E. DURAND, référence 1 par exemple).

GIVENS a montré que par une suite finie de transformations :

$$A_k = R^t_k \, A_{k-1} \, R_k \quad , \quad 1 \leq k \leq m \quad \text{avec} \quad A_o = A$$

où les R_k sont, comme dans la méthode de JACOBI, des rotations planes et où R^t_k désigne la matrice transposée de R_k, une matrice symétrique A d'ordre N peut être mise sous la forme tridiagonale. Les matrices orthogonales R_k sont choisies afin d'annuler successivement les éléments extratridiagonaux de telle façon que les éléments une fois annulés, restent nuls. Ainsi, le nombre de transformations est au plus égal à $N(N-1)/2$.

La transformation LR de RUTISHAUSER est un algorithme de calcul des valeurs propres par triangularisation. Le principe de la méthode est de décomposer la matrice donnée $A = A_1$ et ses matrices semblables A_k en un produit de deux matrices triangulaires inférieure L_k et supérieure R_k :

$$A_k = L_k \, R_k \quad \text{(décomposition)}$$

$$A_{k+1} = L^{-1}_k \, A_k \, L_k = R_k \, L_k \quad \text{(recomposition)} \quad , \quad k \geq 1.$$

Moyennant certaines conditions, cette suite infinie converge vers une matrice triangulaire dont les valeurs propres se trouvent sur la diagonale principale.

CONCLUSION

Le code LYAPNOV , comme il a été précédemment mentionné, est prévu pour être couplé à un langage de simulation. Mais c'eut été une perte de temps que de le coupler au code NEPTUNIX 1, qui est en passe d'être remplacé par NEPTUNIX 2. C'est pourquoi nous avons préféré ne pas effectuer cette phase des opérations et attendre que soient réalisées les améliorations prévues de NEPTUNIX, quitte à laisser le soin d'effectuer le couplage à ceux qui s'en serviront ultérieurement dans leurs travaux. Nous espérons aussi qu'ils pourront apporter à ce code certaines améliorations et le rendre plus puissant, notamment en ce qui concerne la localisation des équations présentant des vices de formulation, ou bien le remplacement de certaines routines mathématiques utilisées pour des cas généraux par d'autres qui seraient plus adaptées à un problème particulier. Cela étant, nous avons toutes les raisons d'espérer que LYAPNOV constituera un outil précieux pour tous ceux qui s'occupent de simulation et de modélisation, dans la phase de mise au point de leurs modèles: ce serait alors le meilleur aboutissement de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. HOCQUENGHEM, P. JAFFARD, R. CHENON,
MATHEMATIQUES TOME 2 - MASSON 1970

[2] J. BASS
COURS DE MATHS. Tome I et II - Masson 1961

[3] KORGANOFF & PAVEL-PARVU
Eléments de théorie de matrices carrées et rectangles Dunod - 1967

[4] BELLMAN
Introduction to matrix analysis - Mac-Graw Hill 1970

[5] E. DURAND
Solutions numériques des équations algébriques. Tome II - Masson 1961

[6] A. BONNEMAY
Cours de DEA : Stabilité des systèmes et application à la modélisation 1979

[7] A.Y. BARRAUD
Investigations autour de la fonction signe d'une matrice
Revue RAIRO - Automatique - Vol 13, n° 4 - 1979

[8] C.W. GEAR
Numerical initial value problems in ordinary differential equations
Prentice Hall Inc. 1971

[9] LA SALLE & LEFSCHETZ
Stability by LIAPNOV's direct method
Academic Press 1961

[10] COMBE
Cours d'analyse numérique (polycopié Sup'elec)

[11] LA SALLE & ARTSTEIN
The stability of dynamical systems, SIAM,
Philadelphia, Penn 19103 -1976

[12] A. KORGANOFF
Méthode de calcul numérique, tome 1 - Dunod 1961

[13] A. BONNEMAY
Cours de DEA : Une extension des systèmes dynamiques abstraits : Les systèmes déterministes et leur stabilité - Saclay 1981

[14] CETAEV
The stability of motion
GITTL - Moscou 1959, en anglais
Pergamon, Londres 1961

[15] LASALLE.
Stability theory for ordinary differential equations.
J. diff. equ. E, 1968

[16] BIRKHOFF
Collected works vol. 1, Am. Math. Soc. New York USA 1950

[17] GANTMACHER
The theory of matrices, 2 tomes - Chelsea N.Y. 1959

[18] WOLFGANG HAHN
Theorie und Anwendung der direkten. Methoden von LIAPUNOV - Springer Berlin 1959

[19] A.M. LETOV
Stability of non linear regulated systems
Princeton University Press

[20] M. GUELMAN
rapport CEA R-3593-1968

[21] MINORSKY
Non linear oscillations, Van Nostrand 1962

[22] MARKOV
Sur une propriété générale des ensembles minimaux de M. BIRKHOFF Cras
Paris. Vol. 193, 1931

[23] WEAVER
Reactor dynamics and control - Elsevier 1968

[24] ERGEN-LIPKIN
Applications of LYAPOUNOV second method in reactor dynamics

[25] A. BONNEMAY
Extension des théorèmes linéaires de LYAPOUNOV aux systèmes implicites - RAIRO
Automatique 1979 n° 4

[26] Y. MONSEY
Contribution à la résolution des grands systèmes algébro-différentiels, Thèse
d'état, Orsay 1977, et rapport CEA-R-4834

[27] M. NAKHLE : Etude d'un langage et réalisation d'un système de simulation numérique
muni d'une dérivation formelle, Thèse d'état, Orsay, 1979

[28] NAKHLE, ROUX
Large systems real time simulation on mini computers. IMACS congress, Sorrento, Italie, 1979

[29] CSMP III
Continous system modeling program III - Program Reference Manual
IBM - SH 19-7002 (1975)

[30] ACSL
Advanced continuous simulation Language - User/guide reference manual
Mitchell and Gauthier Associations Concord, Mas. (1975)

[31] DELOURME
Thèse de 3ème cycle. Contribution à une étude de simulation d'une centrale électro-nucléaire PWR - Code de fonctionnement Picolo - Orsay 1980

[32] SCHULTZ
Genration of LYAPOUNOV function in advanced control systems
Vol. 2 AC Press N.Y. 1965

[33] DANSAC-BON
Modèle mathématique de générateur de vapeur pour centrale nucléaire
Thèse de 3ème cycle - Orsay 1978

[34] BASTIN
Cours de calcul numérique - Bruxelles.